CAPITOLO 12

Calcolo delle Probabilità

12.1 Introduzione al Calcolo delle Probabilità

Una storia  **d'amore**

Luca abita a Lecco, Bianca a Brindisi.

Lui è innamorato perso.

Anche lei ama lui, ma, ultimamente, in modo più altalenante.

Per potersi incontrare, un fine settimana lui va a Brindisi, il successivo lei va a Lecco (dovrebbe andare perché, in realtà, ogni volta sorge qualche difficoltà ….).

Questo fine settimana ad esempio, Bianca ha telefonato a Luca, dicendo che farà scegliere alla sorte ...

 Lancerà una moneta e, se viene testa, partirà, altrimenti non partirà;
se partirà, lancerà un dado  e, a seconda del numero che uscirà, prenderà il primo aereo, il secondo, ecc. dei 6 aerei che collegano Brindisi a Orio al Serio.

Lui da Lecco si è recato di buonora all'aeroporto di Orio al Serio e ha visto arrivare (invano!) i primi 5 aerei da Brindisi.

Lo lasciamo lì che attende, un po'deluso e ansioso il sesto e ultimo aereo.

Ma, ci chiediamo: qual è la probabilità che lei arrivi con il sesto aereo?

Sapete rispondere? Confrontatevi con i vostri compagni.

Siete arrivati tutti alla stessa risposta? Annotate qui sotto le vostre conclusioni:

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Dopo aver affrontato questo capitolo, avrai gli strumenti per gestire in modo corretto il problema.

Il prossimo argomento ci tocca da vicino e forse usiamo già inconsapevolmente il calcolo della probabilità nella vita di ogni giorno.

Se è probabile che oggi piova, prendo l'ombrello, 

se ho buone *probabilità* di trovare un importante reperto, continuo con gli scavi, altrimenti no.

Il calcolo delle probabilità trova applicazioni in archeologia, medicina, economia, fisica, chimica, scienze sociali.

Storicamente, si fa risalire la nascita del calcolo delle probabilità alla risoluzione del problema noto in letteratura come “problema della divisione della posta in gioco” o “problema delle parti”.
La prima versione del problema delle parti che ci è nota è presente in un manoscritto di anonimo del 1400 circa.
La versione più famosa è quella di Luca Pacioli; tuttavia la prima soluzione completa del problema delle parti, arrivata fino a noi, è contenuta nella lettera che Blaise Pascal scrisse a Pierre de Fermat il 29/07/1654.
L’interesse di Pascal per la materia era stato suscitato da Antoine Gombaud, cavaliere di Méré, professionista parigino del gioco d’azzardo.
Gombaud stava giocando a ‘punti’ (gioco in cui, lanciando dadi, si vincevano punti e il giocatore che guadagnava un certo numero di punti, vinceva dei soldi).

Un impegno urgente costrinse Gombaud e il suo compagno a interrompere la partita.
Si presentò così il problema di dividere il premio in denaro. La soluzione più semplice sarebbe stata quella di dare la posta in gioco al giocatore in vantaggio.
Gombaud, non convinto, chiese a Pascal di trovare un modo più equo di dividere la somma, calcolando la probabilità di vittoria di ciascun giocatore se il gioco fosse continuato.
Per cercare regole matematiche più precise rispetto a quelle del tempo, basate solo sull’intuizione e sull’esperienza nel gioco d’azzardo, Pascal iniziò una fitta corrispondenza con Fermat.
Negli anni a seguire si svilupparono le conoscenze in questo campo in modo organico.
In queste pagine troverai le conoscenze di base di questa teoria relativamente moderna.

12.2 Eventi

La signora Gertrude è una pendolare che ogni giorno utilizza il treno per recarsi al lavoro.
Spesso le accade di trovarsi nello stesso scompartimento con quattro ragazze che parlano per tutto il tempo.
Le quattro ragazze sono Anna, Carla, Sara e Maria, vicine di casa che frequentano scuole superiori diverse e che durante il tragitto in treno si raccontano molte cose.
La signora Gertrude, con gli occhi chiusi, ascolta ed ogni volta si chiede se ciò che sente sia o non sia vero.

Ad esempio, ieri Anna diceva che presto andrà a Londra, Carla continuava a ripetere “uffa sono sul treno”, Sara diceva di essere un fantasma e Maria raccontava di volersi comprare una sciarpa.

Nel Calcolo delle Probabilità, un qualunque avvenimento che può risultare **vero** o **falso** viene chiamato **evento**.

In generale, un **evento** viene indicato con la lettera E.

Ad esempio, sono eventi:

- E_1: Anna andrà a Londra.
- E_2: Carla è sul treno.
- E_3: Sara è un fantasma.
- E_4: Maria si comprerà una sciarpa.

Ieri la signora Gertrude è scesa dal treno pensando “E_2 è vero, E_3 è falso, ma per quanto io mi sforzi non posso esprimere il valore di verità di E_1 e di E_4”.

Gli eventi possono essere così classificati:

evento

- **certo** evento che si verifica, avvenimento certo
- **impossibile** evento che non può verificarsi, avvenimento che non può accadere
- **aleatorio** evento casuale, evento incerto per il quale non si può dire se si verificherà o meno

Completa la seguente tabella

evento	**certo**	**aleatorio**	**impossibile**
nel lancio di un dado si ottiene un numero minore di 7	x		
nel lancio di un dado si ottiene 4			
nel lancio di un dado si ottiene un numero pari			
nel lancio di un dado si ottiene 8			
il treno è in orario			
alla tombola viene estratto il numero 88			
alla tombola viene estratto il numero 100			
da un mazzo di 52 carte da gioco estraggo il Re di cuori			
da un mazzo di 52 carte da gioco estraggo una carta di picche			

Prima di procedere impariamo a conoscere altri termini usati in probabilità:

- **not E** = $\overline{E}$: evento negazione o evento contrario

  Come già visto nel capitolo dedicato alla Logica delle Proposizioni, si ha:

  - l'evento $\overline{E}$ è vero se E è falso
  - l'evento $\overline{E}$ è falso se E è vero

- **E_1 and E_2 = $E_1 \wedge E_2$**: evento congiunzione o evento intersezione o prodotto logico

  In analogia con quanto visto nel capitolo dedicato alla Logica, si ha:

  - E_1 and E_2 è vero se entrambi gli eventi E_1 ed E_2 sono veri

- **E_1 or E_2 = $E_1 \vee E_2$** evento disgiunzione o evento unione o somma logica

  In analogia con quanto visto nel capitolo dedicato alla Logica, si ha:

  - E_1 or E_2 è vero se almeno uno dei due eventi E_1 ed E_2 è vero

Si hanno, inoltre, le seguenti definizioni:

eventi compatibili	eventi che possono verificarsi contemporaneamente;
eventi incompatibili	eventi che non possono verificarsi contemporaneamente perché il verificarsi di uno di essi esclude il contemporaneo verificarsi dell'altro;
eventi indipendenti	il verificarsi di uno degli eventi non dipende dal verificarsi dell'altro;
eventi dipendenti	il verificarsi di uno degli eventi influenza il verificarsi dell'altro.

OSSERVAZIONE

Gli eventi relativi ad un determinato fenomeno possono essere rappresentati mediante insiemi e le operazioni fra gli eventi possono essere "viste" come operazioni fra insiemi.

In tale ottica, si associa ad ogni fenomeno un insieme U, detto *universo* o *spazio dei campioni* o ancora *spazio degli eventi*, i cui elementi sono tutti i possibili valori assunti dal fenomeno.

I termini precedentemente introdotti possono, quindi, essere definiti in maniera "più vicina" alla terminologia insiemistica e precisamente:

- evento negazione (o contrario, o complementare) dell'evento E : l'evento $\overline{E}$ che si verifica se e solo se non si verifica E, cioè $\overline{E}$ è il sottoinsieme complementare di E rispetto ad U;
- prodotto logico (o intersezione) di due eventi E_1 e E_2: l'evento $E_1 \cap E_2$ che si verifica se si verificano entrambi gli eventi E_1, E_2;
- somma logica (o unione) di due eventi E_1 e E_2: l'evento $E_1 \cup E_2$ che si verifica quando si verifica almeno uno dei due eventi E_1, E_2;
- E_1, E_2 eventi compatibili: $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$;
- E_1, E_2 eventi incompatibili: $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Abbiamo a disposizione un dado ed un mazzo di 52 carte da gioco, consideriamo i seguenti eventi:

E_1 : dal mazzo di carte estraggo una carta di fiori.

E_2 : dal mazzo di carte estraggo un Re.

E_3: dal mazzo di carte estraggo una carta di seme rosso.

E_4: lancio il dado ed ottengo 2.

Osserviamo che:

- $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_2}$: **eventi compatibili**
  (l'estrazione del Re di fiori verifica contemporaneamente entrambi gli eventi)
- $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_3}$: **eventi incompatibili**
  (nessuna delle carte del mazzo è una carta di fiori e di seme rosso)
- $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_4}$: **eventi indipendenti**
  (il lancio del dado e l'estrazione della carta dal mazzo non si influenzano).

Consideriamo, adesso, il seguente evento: "estrazione di una carta dal mazzo e, senza reimmissione, procedere ad un'altra estrazione". In questo caso:

- $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_2}$: **eventi dipendenti**
  (il verificarsi di uno degli eventi influenza il verificarsi dell'altro: se alla prima estrazione ottengo una carta di fiori alla seconda estrazione il mazzo contiene una carta in meno).

12.3 Probabilità di un evento. Definizione classica

Vogliamo poter in qualche modo misurare la possibilità che un evento si verifichi.
Consideriamo un esperimento aleatorio e sia n il numero dei suoi esiti tutti ugualmente possibili.

esperimento aleatorio	n numero dei possibili esiti
lancio di un dado	$n = 6$
lancio di due dadi	$n = 36$
estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte da gioco	$n = 52$
estrazione di un numero della tombola	$n = 90$

Sia E un evento e sia f il numero di volte che esso si verifica, cioè il numero dei **casi favorevoli**:

evento E	f numero dei casi favorevoli
col lancio di un dado ottengo il numero 2	$f = 1$
col lancio di un dado ottengo un numero pari	$f = 3$
col lancio di un dado ottengo il numero 10	$f = 0$
col lancio di due dadi ottengo due numeri che sommati danno 8	$f = 5$
col lancio di due dadi ottengo due numeri che sommati danno meno di 100	$f = 36$
con l'estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte da gioco ottengo un Re	$f = 4$
con l'estrazione di un numero dalla tombola ottengo un numero dispari	$f = 45$

Possiamo dare, adesso, la definizione di probabilità. In realtà, esistono tre definizioni di probabilità:

a) definizione classica; b) definizione frequentistica; c) definizione soggettiva.

Definizione classica di probabilità.

- Sia E un evento, la **probabilità** $\boldsymbol{p(E)}$ che si **verifichi** l'**evento** $\boldsymbol{E}$ è data dal **rapporto** fra il **numero di casi favorevoli** ed il **numero dei casi possibili**.

Indicando con f il numero di casi favorevoli e con n il numero di casi possibili, si ha: $\boldsymbol{p(E) = \frac{f}{n}}$.

Nella seguente tabella sono indicati alcuni **esempi**:

evento E	$\boldsymbol{p(E)}$
Con il lancio di un dado si ottiene il numero 2	$\frac{1}{6}$
Con il lancio di un dado si ottiene un numero pari	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Con il lancio di un dado si ottiene il numero 10	$\frac{0}{6} = 0$
Con il lancio di due dadi si ottengono due numeri tali che la loro somma sia 8	$\frac{5}{36}$
Con il lancio di due dadi si ottengono due numeri tali che la loro somma sia un numero minore di 100	$\frac{36}{36} = 1$
Con l'estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte da gioco si ottiene un Re	$\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
Con l'estrazione di un numero della tombola si ottiene un numero dispari	$\frac{45}{90} = \frac{1}{2}$

LA SCELTA

Giovanni invita Tiziana a giocare e le presenta tre scatole uguali.

Giovanni: “Tiziana, una sola di questa scatole contiene un premio. Scegli una scatola e, se scegli quella giusta, il premio sarà tuo.”

Tiziana: “Scelgo la scatola numero 3.”

A questo punto, Giovanni, che sa in quale scatola è contenuto il premio, apre la scatola numero 2 e la mostra a Tiziana: è vuota!

Giovanni: ”Tiziana, vuoi fare un cambio oppure vuoi aprire la scatola numero 3?”

Cosa è più conveniente per Tiziana?

Soluzione

Questo problema, in generale, è noto come problema di Monty Hall.

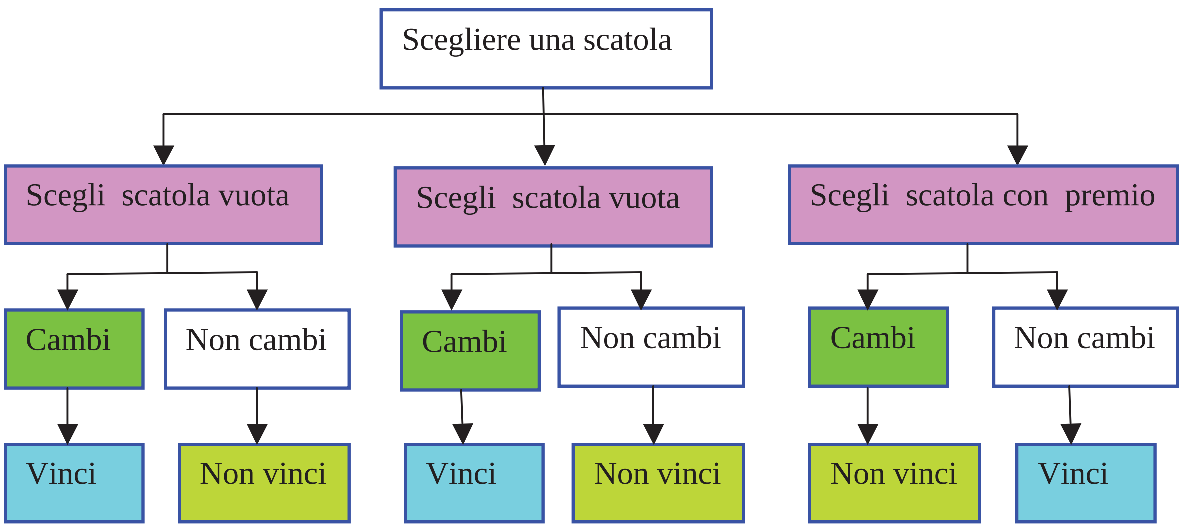
Per determinare la soluzione di questo gioco, ipotizziamo che le scatole 1 e 2 siano vuote e che il premio sia nella scatola 3.

Si possono presentare tre situazioni:

- il giocatore sceglie la scatola n° 1; il conduttore del gioco apre la scatola n° 2; cambiando la scatola il giocatore **vince**;
- il giocatore sceglie la scatola n° 2; il conduttore del gioco apre la scatola n° 1; cambiando la scatola il giocatore **vince**;
- il giocatore sceglie la scatola n° 3; il conduttore del gioco apre, indifferentemente, la scatola n° 1 o la scatola n° 2; cambiando la scatola il giocatore **perde.**

La strategia “*cambiare scatola*” vince due volte su tre; quindi, cambiando scatola la probabilità di vincere il premio è $\frac{2}{3}$.

La situazione è descritta nel seguente diagramma:



12.4. Teoremi sulla probabilità

Prima di introdurre alcuni teoremi utili per il calcolo delle probabilità, osserviamo che

- l'evento certo ha probabilità $\frac{n}{n}=1$
- l'evento impossibile ha probabilità $\frac{0}{n}=0$
- $\forall E: \quad 0 \le p(E) \le 1$

Se E_1 e E_2 sono due eventi, la scrittura $\boldsymbol{p(E_2/E_1)}$ (si legge "probabilità di E_2 condizionata ad E_1") esprime la probabilità che si verifichi l'evento E_2 nel caso in cui si sia verificato l'evento E_1.

- ❖ Se gli eventi E_1 e E_2 sono indipendenti, il verificarsi o meno dell'evento E_1 non modifica la probabilità che si verifichi l'evento E_2; quindi: $p(\mathrm{E}_2)=p(\mathrm{E}_2/\mathrm{E}_1)=p(\mathrm{E}_2/\overline{\mathrm{E}_1})$
- ❖ Se gli eventi E_1 e E_2 sono dipendenti è ovvio che il verificarsi dell'evento E_1 influisce sulla probabilità che si verifichi l'evento E_2; quindi $p(\mathrm{E}_2)\ne p(\mathrm{E}_2/\mathrm{E}_1)$

Teorema della probabilità contraria

Dato un evento E, la probabilità dell'evento contrario $\overline{\mathrm{E}}$ è data dalla differenza fra il numero 1 e la probabilità dell'evento E; in simboli:

$$\forall E: \; p(\overline{E}) = 1 - p(E)$$

Teorema della probabilità composta

Dati due eventi E_1 e E_2, la probabilità del prodotto logico dei due eventi è data dal prodotto fra la probabilità di E_1 e la probabilità di E_2 condizionata E_1; in simboli:

$$\forall E_1, E_2: \; p(E_1 \wedge E_2) = p(E_1)\cdot p(E_2/E_1)$$

Se gli eventi E_1, E_2 sono indipendenti, allora: $p(E_1 \wedge E_2) = p(E_1)\cdot p(E_2)$

Teorema della probabilità totale

Dati due eventi E_1 e E_2, la probabilità della somma logica dei due eventi è data dalla differenza fra la somma delle probabilità di E_1 e E_2 e la probabilità del prodotto logico dei due eventi; in simboli:

$$\forall E_1, E_2 \quad p(E_1 \vee E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \wedge E_2)$$

Se gli eventi E_1, E_2 sono incompatibili, allora: $p(E_1 \vee E_2) = p(E_1) + p(E_2)$

12.5. Esempi

Un'urna contiene 100 biglie. 

Di queste: **50** sono **rosse**, **20** sono **blu**, **8** sono **gialle**, le rimanenti sono **verdi**.

- ✓ **Estraiamo dall'urna una biglia**

a) Qual è probabilità che la biglia sia blu?

Sia B = "estrazione della biglia blu"

f (casi favorevoli) = 20

applicando la definizione classica della probabilità si ottiene: $p(B)=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$

b) Qual è probabilità che la biglia non sia blu?

Applichiamo il Teorema della probabilità contraria: $p(\overline{B})=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$.

- ✓ **Estraiamo dall'urna una biglia e, dopo averla reinserita, ne estraiamo una seconda**.

c) Qual è la probabilità che la prima sia rossa e la seconda sia gialla?

Siano: R = "estrazione di una biglia rossa; f_R (casi favorevoli) = 50

G = "estrazione di una biglia gialla"; f_G (casi favorevoli) = 8

E = "la prima biglia estratta è rossa e la seconda è gialla"

Osserviamo che E è la congiunzione (o prodotto logico) degli eventi R e G; quindi

$\boldsymbol{E = R \wedge G}$.

Gli eventi R e G sono eventi **indipendenti**, quindi, applicando il Teorema della probabilità composta, si ottiene:

$$p(R\wedge G)=p(R)\cdot p(G)\Rightarrow p(R\wedge G)=\frac{50}{100}\cdot\frac{8}{100}=\frac{1}{25}.$$

d) Qual è la probabilità che, delle due biglie estratte, una sia rossa e l'altra sia gialla?

Sia T ="estrazione di una biglia rossa ed una biglia gialla"

L'evento T è diverso dall'evento E del punto precedente, perché, in questo caso, non interessa l'ordine con il quale sono estratte le due biglie; si possono verificare, quindi, due casi:

- la prima pallina estratta è rossa e la seconda è gialla ($R \wedge G$);
- la prima pallina estratta è gialla e la seconda è rossa. ($G \wedge R$).

L'evento T è la **disgiunzione** (o somma logica) degli eventi **($\boldsymbol{R \wedge G}$)** e **($\boldsymbol{G \wedge R}$),** tra loro **incompatibili,** quindi $\boldsymbol{T = (R \wedge G)} \vee \boldsymbol{(G \wedge R)}$.

Applicando il Teorema della probabilità totale, si ottiene:

$$p(T) = p((R \wedge G) \vee (G \wedge R)) = p(R \wedge G) + p(G \wedge R)$$

Sappiamo che $p(R \wedge G) = \dfrac{1}{25}$ [esempio c)], inoltre $p(\mathrm{G} \wedge \mathrm{R}) = p(G) \cdot p(R) = \dfrac{1}{25}$

La probabilità che si verifichi l'evento T è, allora: $\quad p(T) = \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{25} = \dfrac{2}{25}$.

✓ **Estraiamo una biglia dall'urna e, senza reinserirla, ne estraiamo un'altra.**

e) Qual è la probabilità che la prima biglia sia rossa e la seconda sia gialla? 

L'evento E = "la prima biglia estratta è rossa e la seconda è gialla" è lo stesso dell'esempio **c)**; quindi, usando le stesse notazioni, $\boldsymbol{E = R \wedge G}$.

Tuttavia, in questo caso, $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{G}$ sono eventi **dipendenti**, perché, dopo la prima estrazione, il numero n (numero di casi possibili) di biglie rimaste nell'urna è cambiato (sono rimaste 99 biglie).

Sappiamo che $p(R) = \dfrac{1}{2}$, mentre $p(G/R) = \dfrac{8}{99}$; applicando il Teorema della probabilità composta , si ottiene

$$p(R \wedge G) = p(R) \cdot p(G/R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{99} = \frac{4}{99}$$

f) Qual è probabilità che, delle due biglie estratte, una sia rossa e l'altra sia gialla?

Il problema è analogo a quello dell'esempio **d)**; usando le stesse notazioni, si ha:

$$\boldsymbol{T = (R \wedge G) \vee (G \wedge R)}$$

Ricordando che gli eventi ($R \wedge G$) e ($G \wedge R$), sono incompatibili, applichiamo il Teorema della probabilità totale,

$$p(T) = p((R \wedge G) \vee (G \wedge R)) = p(R \wedge G) + p(G \wedge R)$$

Osserviamo che, in questo caso, R e G sono eventi dipendenti, quindi:

$$p(R \wedge G) = p(R) \cdot p(G/R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{99} = \frac{4}{99}$$

$$p(G/R) = p(G) \cdot p(R/G) = \frac{8}{100} \cdot \frac{50}{99} = \frac{4}{99}$$

Quindi: $\quad p(T) = p(R \wedge G) + p(G \wedge R) = \dfrac{4}{99} + \dfrac{4}{99} = \dfrac{8}{99}$

✓ **Estraiamo una biglia dall'urna e, subito dopo, ne estraiamo una seconda e poi ancora una terza.**

g) Qual è la probabilità che la prima biglia estratta sia rossa e le altre siano gialle?

Come negli esempi precedenti, siano:

R = "estrazione di una biglia rossa"; G = "estrazione di una biglia gialla"

S = "la prima biglia estratta è rossa e le altre sono gialle"

Osserviamo che $\boldsymbol{S = (R \wedge G) \wedge G}$ e che gli eventi R, G, $R \wedge G$ sono dipendenti perché

……………………………………………………………………………………………

….………………………………………………………………………………(**Completa**).

Applicando il Teorema della probabilità composta, si ha:

$$p(S) = p((R \wedge G) \wedge G) = p(R \wedge G) \cdot p(G/(R \wedge G)) =$$
$$= p(R) \cdot p(G/R) \cdot p(G/(R \wedge G)) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{99} \cdot \frac{7}{98} = \frac{2}{693}$$

h) Qual è la probabilità che una delle biglie estratte sia rossa e le altre siano gialle?

Il problema è analogo a quello dell'esempio **f)**.

Sia $\boldsymbol{C}$ = "estrazione di una biglia rossa e di due biglie gialle"

I casi che si possono presentare sono:

- la prima biglia estratta è rossa, la seconda e la terza sono gialle;
- la prima biglia estratta è gialla, la seconda è rossa, la terza è gialla;
- la prime due biglie estratte sono gialle e la terza è rossa.

Quindi: $\boldsymbol{C = [(R \wedge G) \wedge G] \vee [(G \wedge R) \wedge G] \vee [(G \wedge G) \wedge R]}$.

Osservato che gli eventi $[(R \wedge G) \wedge G]$, $[(G \wedge R) \wedge G]$ e $[(G \wedge G) \wedge R]$ sono incompatibili, applichiamo il Teorema della probabilità totale:

$$p(C) = p((R \wedge G) \wedge G) + p((G \wedge R) \wedge G) + p((G \wedge G) \wedge R) =$$
$$= p(R) \cdot p(G/R) \cdot p(G/(R \wedge G)) + p(G) \cdot p(R/G) \cdot p(G/(G \wedge R)) +$$
$$+ p(G) \cdot p(G/G) \cdot p(R/(G \wedge G)) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{99} \cdot \frac{7}{98} + \frac{8}{100} \cdot \frac{50}{99} \cdot \frac{7}{98} + \frac{8}{100} \cdot \frac{7}{99} \cdot \frac{50}{98} = \frac{2}{231}$$

✓ **Estraiamo una carta da un mazzo di 52 carte da gioco**

i) Qual è la probabilità che la carta estratta sia una carta nera o una figura?

Siano N = "estrazione di una carta nera"; f_N (casi favorevoli) = 26;

F = "estrazione di una figura"; f_F (casi favorevoli) = 12;

M = "la carta estratta è una carta nera o una figura".

Osserviamo che l'evento M è la disgiunzione (o somma logica) degli eventi N e F; in simboli: $\boldsymbol{M = N \vee F}$. Inoltre, N e F sono eventi **compatibili**: infatti, nel mazzo di carte sono presenti 6 figure nere $\left(f_{N \cap F} = 6 \right)$.

Applicando il Teorema della probabilità totale, si ottiene:

$$p(N \vee F) = p(N) + p(F) - p(N \wedge F) =$$
$$= p(N) + p(F) - p(N) \cdot p(N/F) =$$
$$= \frac{f_N}{n} + \frac{f_F}{n} - \frac{f_N}{n} \cdot \frac{f_{N \cap F}}{f_{\mathrm{N}}} = \frac{26}{52} + \frac{12}{52} - \frac{26}{52} \cdot \frac{6}{26} = \frac{32}{52} = \frac{8}{13}$$

j) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un Re o una carta di cuori?

Siano: R = "estrazione di un Re"; f_R (casi favorevoli) = 4;

C = "estrazione di una carta di cuori"; f_C (casi favorevoli) = 13;

H = "estrazione di un Re o una carta di cuori".

L'evento H è la disgiunzione (o somma logica) degli eventi R e C, tra loro **compatibili** (perché ………………………………………………………………………. e, quindi, $f_{\mathrm{R \cap C}} = ...$); in simboli $\boldsymbol{H = R \vee C}$.

Applicando il Teorema della probabilità totale, si ottiene:

$$p(R \vee C) = p(R) + p(C) - p(R \wedge C) =$$
$$= p(R) + p(C) - p(R) \cdot p(R/C) =$$
$$= \frac{f_R}{n} + \frac{f_C}{n} - \frac{f_R}{n} \cdot \frac{f_{R \cap C}}{f_{\mathrm{R}}} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{4}{52} \cdot \frac{1}{4} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

12.6 Definizione frequentistica della probabilità

Sembra ci sia una nuova lampadina che duri molto di più di quelle attualmente sul mercato. Per poter decidere di metterla in produzione occorre stimare la probabilità dell'evento E = " **la nuova lampadina dura di più delle vecchie**".

In laboratori diversi si eseguono prove per verificare la durata della nuova lampadina e ogni laboratorio riporta in una tabella le frequenze assolute delle due modalità:

x_1 = lampadina accesa (dopo un tempo t); x_2 = lampadina spenta (dopo lo stesso tempo t).

Laboratorio A esamina 50 lampadine

al tempo t	Frequenza
lampadina accesa	14
lampadina spenta	36

……………………………………..

…………………………………….

Laboratorio B esamina 80 lampadine

al tempo t	Frequenza
lampadina accesa	22
lampadina spenta	58

…………………………………….

…………………………………….

……………………………………. Laboratorio L esamina 800 lampadine

al tempo *t*	Frequenza
lampadina accesa	236
lampadina spenta	564

Per poter confrontare i dati ottenuti dai 10 laboratori coinvolti, inseriamo in una tabella i valori delle frequenze relative della modalità lampadina accesa

laboratori	numero di lampadine esaminate	numero lampadine accese al tempo *t*	frequenza relativa dei successi
A	50	14	0,28
B	80	22	0,275
C	100	31	0,31
D	120	36	0,3
E	150	44	0,29(3)
F	160	45	0,28125
G	200	61	0,305
H	300	90	0,3
I	500	155	0,31
L	800	236	0,295

Conviene mettere in produzione tale lampadina?

Ci si aspetta che la probabilità dell'evento E sia legata ai valori trovati nella colonna delle frequenze relative del carattere x_1 = lampadina accesa; possiamo, dunque, dire che $p(\mathrm{E}) \cong 0,3$.

Questo permetterà il confronto con la durata delle altre lampadine e, quindi, la decisione di mettere in produzione o meno quel tipo di lampadine.

Definizione frequentistica della probabilità

Se è possibile avere a disposizione una serie di prove ripetute un gran numero di volte nelle stesse condizioni, si può assumere come stima attendibile della probabilità di un evento il valore della **frequenza relativa** dei successi in quelle prove; in simboli

$$\boldsymbol{p(E) = f_R}$$

12.7. Definizione soggettiva della probabilità

Alberto e Bruno assistono alle gare di corsa organizzate a fine anno dalla scuola. Alberto è convinto che il suo amico Carlo vincerà la gara dei 100 metri ed è pronto a scommettere con Bruno.

Bruno accetta la scommessa e Alberto propone quanto segue:

- se Carlo vincerà la gara, Bruno dovrà offrire ad Alberto 10 gelati nel corso dell'estate,
- se Carlo non vincerà, sarà Alberto che dovrà offrire a Bruno 8 gelati.

Alberto crede molto nella possibilità di vincire da parte di Carlo; infatti, è disposto a pagare 8 per ottenere 10.

Parte la gara e a vincere è proprio Carlo; Alberto esulta per la vittoria dell'amico e per aver vinto la scommessa con Bruno.

Bruno ha intenzione di rifarsi e così propone ad Alberto una nuova scommessa.

Bruno spera che Dario possa vincere la gara di corsa ad ostacoli e propone quanto segue:

- se Dario vincerà la gara, Alberto dovrà offrire a Bruno 8 gelati nel corso dell'estate,
- se Dario non vincerà, sarà Bruno che dovrà offrire ad Alberto 2 gelati.

Bruno spera tanto nella vittoria di Dario, ma non ne è pienamente convinto infatti è disposto a pagare solo 2 per ottenere 8.

Non abbiamo saputo chi abbia poi vinto la gara di corsa ad ostacoli.

Possiamo però riflettere sulle due scommesse.

- La scommessa di Alberto è stata formulata in seguito alle sue grandi aspettative di vittoria; infatti, essere disposto a pagare 8 per ottenere 10 è come assegnare all'evento "Carlo vince" una probabilità pari a $\frac{8}{10} = 0{,}8 = 80\%$.
- La scommessa di Bruno è stata formulata con la sola speranza di poter recuperare qualcosa rispetto alla perdita della scommessa precedente.

  In questa scommessa sono chiaramente meno evidenti le aspettative di vittoria , infatti essere disposto a pagare 2 per ottenere 8 è come assegnare all'evento "Dario vince" una probabilità pari a $\frac{2}{8} = 0,25 = 25\%$.

Definizione soggettiva della probabilità

In base alle proprie opinioni e alle informazioni di cui si dispone, si dichiarano:

- il valore $\boldsymbol{S}$ che si **riceve** nel caso in cui l'**evento** si **verifichi**;
- il valore $\boldsymbol{P}$ che si è **disposti a pagare in caso contrario**.

la probabilità che si verifichi l'evento E, quindi, la misura del grado di fiducia che si attribuisce al verificarsi dell' evento E, è data dal rapporto fra P d S; in simboli:

$$\boldsymbol{p(E)=\frac{P}{S}}$$

12.8. Gioco equo

Un gioco si dice **equo** se $\boldsymbol{(S-P)\cdot p(E)=P\cdot p(\overline{E})}$

Nel caso delle scommesse tra Alberto e Bruno del paragrafo 12.7 si ha:

Scommessa di Alberto

$S=10$; $P=8$;
$$(10-8)\cdot 0,8=8\cdot 0,2$$
$$1,6=1,6$$

Scommessa di Bruno

$S=8$; $P=2$;
$$(8-2)\cdot 0,25=2\cdot 0,75$$
$$1,5=1,5$$

I due ragazzi hanno scommesso in modo corretto.

Nel gioco della **roulette** è possibile scegliere di puntare una certa somma x sull'uscita di un numero rosso e, se questo numero esce, si riceve $2x$, il doppio della somma puntata.

E' un gioco equo?

Sulla ruota che gira ci sono diciotto numeri su sfondo rosso, diciotto numeri su sfondo nero ed un numero su sfondo verde (il numero zero).

E = "esce un numero su sfondo rosso"; $p(E)=\frac{18}{37}$.

Il gioco è equo se $(S-P)\cdot p(E)=P\cdot p(\overline{E})$; eseguiamo i calcoli:

$$(2x-x)\cdot\frac{18}{37}=x\cdot\left(1-\frac{18}{37}\right)\Rightarrow\frac{18}{37}x=\frac{19}{37}x\Rightarrow x=0$$

Il gioco è **equo** solo se $\boldsymbol{x=0}$!!!

Il gioco risulterebbe equo se in caso di vincita si ricevesse $\frac{37}{18}$ volte la somma puntata, infatti:

$$\left(\frac{37}{18}x-x\right)\cdot\frac{18}{37}=\left(1-\frac{18}{37}\right)\Rightarrow\frac{19}{18}\cdot\frac{18}{37}x=\frac{19}{37}x\Rightarrow\frac{19}{37}x=\frac{19}{37}x$$

Nel gioco del **lotto** è possibile scegliere di puntare una certa somma x sull'estrazione di un numero e, se questo viene estratto, si riceve dallo Stato 11,232 volte la somma puntata.

E' un gioco equo?

Nel gioco del lotto vengono estratti 5 numeri naturali compresi tra 1 e 90.

Immaginiamo di voler puntare sull'estrazione del numero 8.

Sia E = "tra i cinque numeri estratti è presente il numero 8"; $p(E)=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$.

Il gioco è equo se $(S-P)\cdot p(E)=P\cdot p(\overline{E})$; eseguiamo i calcoli:

$$(11,232x-x)\cdot\frac{1}{18}=x\left(1-\frac{1}{18}\right)\Rightarrow\frac{10,232}{18}x=\frac{17}{18}x\Rightarrow x=0$$

il gioco è **equo** solo se ***x* = 0** !!!

Il gioco risulterebbe equo se in caso di vincita si ricevesse 18 volte la somma puntata, infatti

$$(18x-x)\cdot\frac{1}{18}=\left(1-\frac{1}{18}\right)\Rightarrow 17\cdot\frac{1}{18}x=\frac{17}{18}x\Rightarrow\frac{17}{18}x=\frac{17}{18}x$$

E ora che questo breve capitolo è terminato, siamo in grado di risolvere il problema dell'aereo. Prova prima da solo.

12.9 Possibili risposte al problema dell'aereo

Soluzione 1

C'è chi, in modo molto sbrigativo, risponde:

"Non mi faccio confondere. La faccenda è chiara:

- 50% è la probabilità che sia uscita croce;
- 50% è la probabilità che sia uscita testa.

Se è uscita testa, visto che Bianca non è partita con i primi 5 aerei, sicuramente sarà sul sesto.

La probabilità che Bianca sia sul sesto aereo è $\frac{1}{2}$."

Soluzione 2

C'è chi, in modo molto convinto, subito replica:

"E i dadi non li conti? Gli eventi possibili sono:

(Testa, 1); (Testa, 2); (Testa, 3); (Testa, 4); (Testa, 5); (Testa, 6); Croce.

La probabilità che Bianca raggiunga Luca è $\frac{1}{7}$."

Soluzione 3

C'è chi, invece, si ritiene rigoroso e preciso:

"Faccio un discorso analitico e preciso. La probabilità che Bianca sia sul sesto aereo è $\frac{1}{6}$ (perché poteva partire con uno dei 6 aerei) del 50% (perché poteva partire o non partire). Ma $\frac{1}{6}$ del 50% è come dire 1/6 di $\frac{1}{2}$ e, quindi, 1/12.

La probabilità che Bianca sia sul sesto aereo è $\frac{1}{12}\cong 8\%$ ".

Soluzione 4

C’è chi, prima di rispondere, ha preparato una tabella:

	1	2	3	4	5	6
testa	testa, 1	testa, 2	testa, 3	testa, 4	testa, 5	testa, 6
croce	croce					

“Anche se con croce, lei non lancia il dado, l’evento croce deve comunque risultare equiprobabile all’evento testa.

I casi possibili allora, sono esattamente 12:

T1, T2, T3, T4, T5, T6, C1, C2, C3, C4, C5, C6.

	1	2	3	4	5	6
testa	testa, 1	testa, 2	testa, 3	testa, 4	testa, 5	testa, 6
croce	croce, 1	croce, 2	croce, 3	croce, 4	croce, 5	croce, 6

Ma questo vale solo fino alla sera precedente.

Se ci mettiamo nei panni di quel poveretto che aspetta, gli eventi possibili sono ora

T6, C1, C2, C3, C4, C5, C6.

e quindi l'esito T6, che corrisponde all'arrivo con il sesto aereo, ha probabilità $\frac{1}{7} \cong 14\%$

Ma, allora, ognuno può dire la sua?

Tu che hai studiato però, sai benissimo che l’unico ragionamento corretto è quello della soluzione n°….

ESERCIZI CAPITOLO 12

Conoscenza e comprensione

1) Cosa si intende per evento certo, evento impossibile ed evento aleatorio?

2) Due eventi sono indipendenti se……………………………………………………………… .

3) Due eventi sono compatibili se…………………………………………………………….. .

4) Fornisci le definizioni classica, frequentistica e soggettiva della probabilità.

5) Un gioco si dice equo se………………………………………………………………………. .

6) Enuncia e dimostra il teorema della probabilità contraria.

Esercizi

Quattro esercizi con un mazzo di 52 carte da gioco

7) Calcola la probabilità che venga estratta la carta 8 di cuori.

8) Calcola la probabilità che venga estratta una carta di fiori.

9) Calcola la probabilità che vengano estratte due carte di picche.

10) Calcola la probabilità che vengano estratte una figura ed un 10.

Sei esercizi con una scatola contenente dieci palline contrassegnate ciascuna con un numero da 1 a 10

11) Calcola la probabilità che venga estratta la pallina numero 7.

12) Calcola la probabilità che venga estratta una pallina con numero pari.

13) Calcola la probabilità che venga estratta la pallina numero 7 e, dopo averla reinserita, venga estratta la pallina numero 10.

14) Calcola la probabilità che vengano estratte prima la pallina numero 7 e poi la pallina numero 10.

15) Calcola la probabilità che vengano estratte due palline ed una sia la numero 7.

16) Calcola la probabilità che vengano estratte due palline i cui numeri sommati diano 10.

Tre esercizi con dadi a 6 facce

17) Calcola la probabilità che, lanciando 2 dadi, si ottenga un punteggio maggiore di 9.

18) Calcola la probabilità che, lanciando 2 dadi, si ottenga un divisore di 12 su almeno uno dei due dadi.

19) Calcola la probabilità che, lanciando 3 dadi, si ottenga un punteggio uguale a 10.

Due ulteriori esercizi

20) Luca partecipa ad un gioco, la probabilità di vincere è del 32% ed è disposto a pagare 10 euro. Supponendo che il gioco sia equo, quanto dovrebbe ricevere nel caso vincesse?

21) Nel gioco del lotto la puntata sul primo estratto dà diritto a ricevere 26 volte la somma puntata. E’ un gioco equo?