UNITÀ 4

LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE NEL PIANO

4.1 Introduzione

Il tema “trasformazioni geometriche nel piano” è spesso trascurato o, in genere, sviluppato come un capitolo a parte, non integrato con gli altri argomenti geometrici.

Cominciamo con il sottolineare che le trasformazioni geometriche permettono, innanzitutto, un efficace approccio operativo attraverso un’attività sia manipolativa (piegatura della carta, costruzione di modelli concreti di oggetti), sia legata al disegno, … fino a quella laboratoriale, con l’uso di strumenti sempre più rigorosi (carta, riga, squadra, compasso, Cabri …). Questi percorsi diversi, legati, ovviamente, all’età degli allievi, portano a definizioni via via più puntuali e formali dei concetti e, nel contempo, ad una progressiva astrazione, frutto del più generale processo di apprendimento, visto, appunto, come un graduale processo di costruzione.

L’argomento si presta, inoltre, ad uno sviluppo interdisciplinare, anche grazie a sollecitazioni e ad esempi che provengono dall’osservazione della realtà (basti pensare alle simmetrie nell’arte, nella natura, nella struttura dei cristalli e delle molecole, ...).

Attualmente, nell’insegnamento della geometria si confrontano due grandi *approcci*, il primo basato sull’impostazione euclidea ed il secondo sulla *geometria delle trasformazioni*.

La nascita del secondo approccio si identifica con la pubblicazione nel 1872 del cosiddetto “Programma di Erlangen”, ad opera di Felix Klein (1849-1925). In tale occasione Klein intese la geometria come lo studio (o l’insieme) delle proprietà delle figure che restano invariate (“**invarianti**”) quando su di esse si opera con un determinato **gruppo di trasformazioni**.

Se come trasformazioni si scelgono quelle del gruppo delle omografie, delle affinità, delle similitudini, delle isometrie, … si otterrà rispettivamente la geometria proiettiva, affine, simile, euclidea, … : un qualunque gruppo di trasformazioni fa nascere, quindi, una *nuova* geometria.

In particolare, la *geometria euclidea* del piano diventa lo studio delle proprietà delle figure che restano invariate quando su di esse si opera con il *gruppo delle isometrie*, cioè con le trasformazioni del piano in sé che conservano le distanze (simmetrie assiali - simmetrie centrali - traslazioni - rotazioni).

Il nostro sforzo mira ad integrare i due *approcci*: insisteremo sulle costruzioni geometriche, attenti, però, a non ridurre il tema al “semplice” studio delle trasformate delle figure e a riflettere, piuttosto, sul concetto di funzione, con lo studio del piano non localmente ma nella sua globalità.

E' importante osservare che il termine “trasformazione” viene riferito, in genere, a cambiamenti, spesso irreversibili, rilevati, in un certo *soggetto*, nel confronto tra “*un prima*” e “*un dopo*” e legati, perciò, allo scorrere del tempo (passaggio di stato della materia, modificazione/acquisizione di proprietà, evoluzione di un essere vivente, …).

In tale accezione, le simmetrie, le traslazioni e le rotazioni non potrebbero essere chiamate trasformazioni, dato che non modificano alcuna proprietà delle figure, né possono essere viste come movimenti fisici: le figure geometriche, in quanto insiemi di punti ideali, non si muovono!

In Matematica, quando si parla di trasformazioni geometriche, ci si trova di fronte **simultaneamente** a due (o più) figure e quello che interessa è la maniera *in cui esse si corrispondono*, il che significa parlare di una *corrispondenza*, cioè di una funzione definita non solo tra i punti che formano due figure corrispondenti, ma tra tutti i punti dello spazio geometrico considerato.

Più precisamente, se S indica uno spazio geometrico, ad esempio il piano, una trasformazione geometrica di S è una funzione biunivoca tra i punti di S, ossia tale che ad ogni punto di S corrisponde uno ed un solo punto di S e, viceversa, ogni punto di S è il corrispondente di uno ed un solo punto di S. Essa, pertanto, non implica alcun legame con il tempo e con il movimento ed è caratterizzata dalla reversibilità.

Non è, dunque, corretto sostenere che lo studio delle trasformazioni geometriche favorisca una visione *dinamica* della geometria, uno studio dinamico delle figure[1], in quanto *il legame che intercorre tra una figura e la sua trasformata è statico* e il movimento fisico (o rigido) consente **solo** di "materializzare", di rendere, cioè, "visibile" il concetto di trasformazione geometrica che non è ad esso riducibile, in quanto è relazione tra enti astratti.

Nei paragrafi successivi viene affrontato lo studio delle trasformazioni geometriche fondamentali ("*le trasformazioni isometriche*") e viene avviato il discorso sui **gruppi di trasformazioni** che, grazie all'analogia strutturale, permettono una visione unitaria delle diverse **geometrie** (euclidea e non euclidea).

L'approfondimento si avrà, poi, con lo studio delle trasformazioni non isometriche (l'omotetia, la similitudine, l'affinità) e, ancor dopo, con le equazioni delle varie trasformazioni.

---

[1] *…….. lo studio della geometria trarrà vantaggio da una presentazione non statica delle figure, che ne renda evidenti le proprietà nell'atto del loro modificarsi; sarà anche opportuno utilizzare materiale e ricorrere al disegno. La geometria dello spazio non sarà limitata a considerazioni su singole figure, ma dovrà altresì educare alla visione spaziale. E' in questa concezione dinamica che va inteso anche il tema delle trasformazioni geometriche* [dai Nuovi Programmi della scuola media (*D.M. 9 febbraio 1979*)].

4.2 Il concetto di trasformazione geometrica

Si chiama **trasformazione geometrica** una corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano, cioè una funzione biunivoca (o, è lo stesso dire, bigettiva o biiettiva) che associa ad ogni punto P di un piano α uno ed un solo punto P' dello stesso piano (fig. 1):

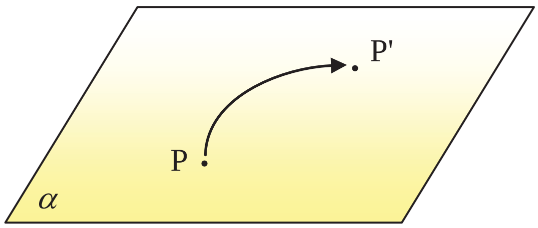


fig. 1

Nel caso di una generica figura $\mathbb{F}$, essendo questa un sottoinsieme di punti del piano, una trasformazione geometrica associa a ciascun punto della figura $\mathbb{F}$ uno ed un solo punto di $\mathbb{F}'$ (fig. 2):

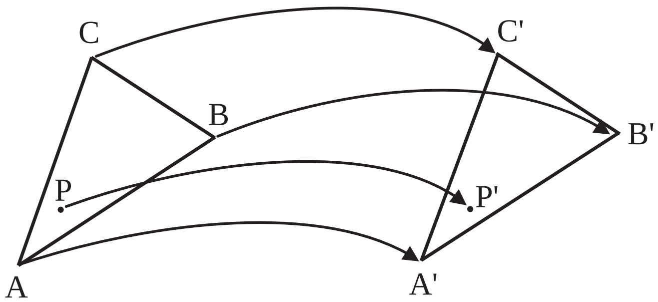


fig. 2

Il punto P' [la figura $\mathbb{F}'$], che si ottiene mediante una trasformazione geometrica viene detto/a il/la **trasformato/a** (o l'**immagine** o il/la **corrispondente** o, ancora, l'**omologo/a**) del punto P [della figura $\mathbb{F}$] di partenza.

Utilizzando la simbologia delle funzioni, se *g* è il "nome" della trasformazione che *associa* al punto P [alla figura $\mathbb{F}$] il punto P' [la figura $\mathbb{F}'$], possiamo scrivere indifferentemente:

- $g : P \to P'$ [$g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$]
- $P \xrightarrow{g} P'$ [$\mathbb{F} \xrightarrow{g} \mathbb{F}'$]
- $g(P) = P'$ [$g(\mathbb{F}) = \mathbb{F}'$] .

Esempio:

Definiamo "una" trasformazione del piano procedendo nel seguente modo: fissiamo un punto qualsiasi O del piano e ad ogni **punto P** del piano, diverso da O, "associamo" il punto medio P' del segmento OP (fig. 3):

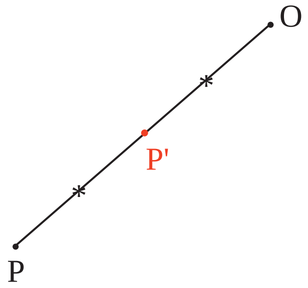


fig. 3

Si osserva che, in tal modo, è stata definita una funzione biunivoca, diciamola *g*, del piano in sé (**PROVA TU**).

- Per ottenere il trasformato del **segmento AB**, si "costruiscono" i trasformati dei punti A e B (fig. 4):

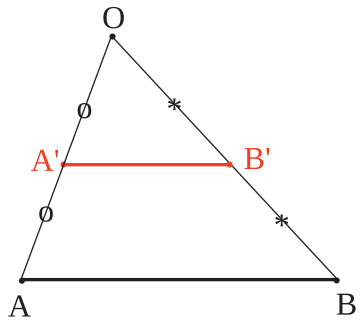
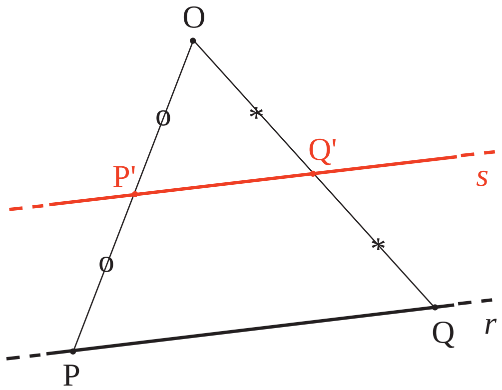


fig. 4

Il segmento A'B' è il trasformato del segmento AB nella "nostra" trasformazione (puoi "verificare" che A'B' // AB).

- Per ottenere la trasformata della **retta *r***, si prendono due qualsiasi punti di essa e, procedendo come sopra, si ottiene la retta *s*, trasformata di *r* (fig. 5):



(puoi "verificare" che *s* // *r*).

fig. 5

- E ancora, per ottenere il trasformato del **triangolo ABC**, retto in C, si determinano le immagini di A, B, C (rispettivamente A', B', C') e si ha il triangolo A'B'C' (fig. 6):

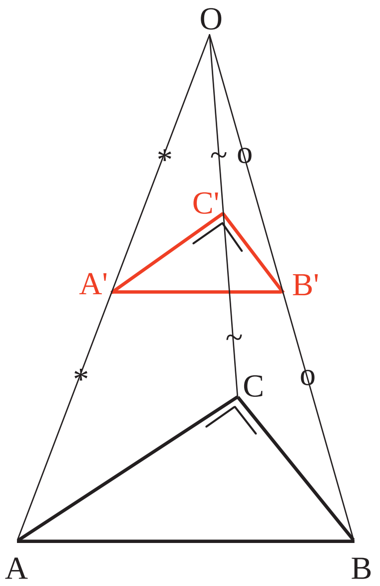


fig. 6

(puoi "verificare" che A'B' // AB, A'C' // AC, B'C' // BC e che il triangolo A'B'C', trasformato del triangolo ABC, è retto in C').

Da quanto sopra, risulta evidente che la "nostra" trasformazione **non modifica** determinate proprietà geometriche (*conserva*, cioè, *alcune proprietà*), come la direzione e la perpendicolarità, mentre **modifica** altre proprietà, come la distanza fra due punti.
Si danno, quindi, le seguenti definizioni:
Si dicono **invarianti** di una trasformazione geometrica le caratteristiche che rimangono inalterate nella trasformazione.
Si dicono **varianti** di una trasformazione geometrica le caratteristiche che si modificano nella trasformazione.
Osserviamo, poi, che gli elementi che si corrispondono in una trasformazione non sono, in genere, lo stesso oggetto; vi possono essere, però, elementi che hanno per corrispondenti se stessi e che, per tale motivo, si dicono **punti uniti** della trasformazione geometrica.

Così, se indichiamo con τ una trasformazione geometrica, si ha che:

- un punto **P** si dice **unito** se coincide con la sua immagine, cioè se $\tau(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$;
- una retta $\boldsymbol{r}$ si dice **unita** se coincide con la sua immagine, cioè se $\tau(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$;
- una figura $\mathbb{F}$ si dice **unita** se coincide con la sua immagine, cioè se $\tau(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$.

Tra le trasformazioni geometriche del piano, vi è, in particolare, quella che associa ad ogni punto se stesso; tale trasformazione si dice **trasformazione identica** o **identità**.

Indicando l'identità con $\boldsymbol{i}$, si ha:

$$\forall \mathrm{P} : \boldsymbol{i}\,(\mathrm{P}) = \mathrm{P},$$

cioè, in una identità, tutti i punti sono uniti.

Una trasformazione può essere applicata più volte; per esempio, nella trasformazione di fig. 7, il punto A ha per trasformato il punto B e, nella stessa trasformazione, il punto B ha per trasformato il punto C:

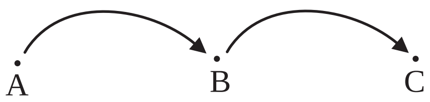


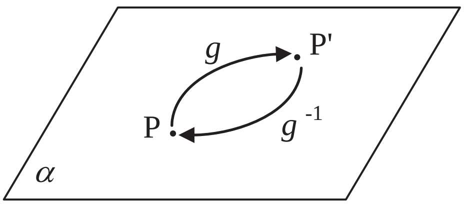
fig. 7

[*parleremo in seguito del "prodotto di trasformazioni"*].

Si dice **involutoria** una trasformazione che, applicata due volte, "fa tornare" ogni elemento su se stesso e, quindi, è quella trasformazione che "composta" con se stessa, dà la trasformazione identica. In simboli:

$$g \text{ involutoria} \Leftrightarrow g \circ g = i\ .$$

Poiché una trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano, si ha che, per ogni trasformazione g del piano, esiste la trasformazione inversa g^{-1} (pag. 208, Tomo 1, algebra). Si ha quindi (fig. 8):



$$g : \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P'}$$
$$g^{-1} : \mathrm{P'} \rightarrow \mathrm{P}$$

fig. 8

Inoltre, *componendo* due funzioni biunivoche, si ottiene ancora una funzione biunivoca (**PROVA TU**), per cui, in particolare, la composizione di una trasformazione con la sua inversa è una trasformazione del piano che associa ad ogni punto se stesso:

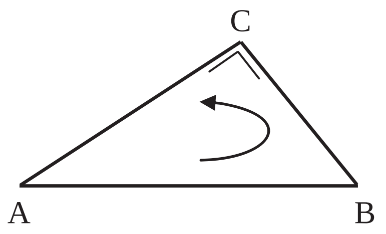
$$g^{-1} \circ g : \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P} \qquad \forall \mathrm{P}\ ,$$

e pertanto è la **trasformazione identica** (pag. 212, Tomo 1, algebra); cioè:

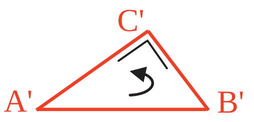
$$g^{-1} \circ g = i\ .$$

Una trasformazione si dice **diretta** se **ha** come invariante l'orientamento dei punti, cioè se conserva il "verso" delle figure geometriche.

La trasformazione di cui in fig. 6 è diretta perché il triangolo ABC è "letto" in verso antiorario:



così come quello trasformato A'B'C':



Una trasformazione si dice **inversa** se **non** ha come invariante l'orientamento dei punti, cioè se non conserva il "verso" delle figure geometriche (fig. 9):

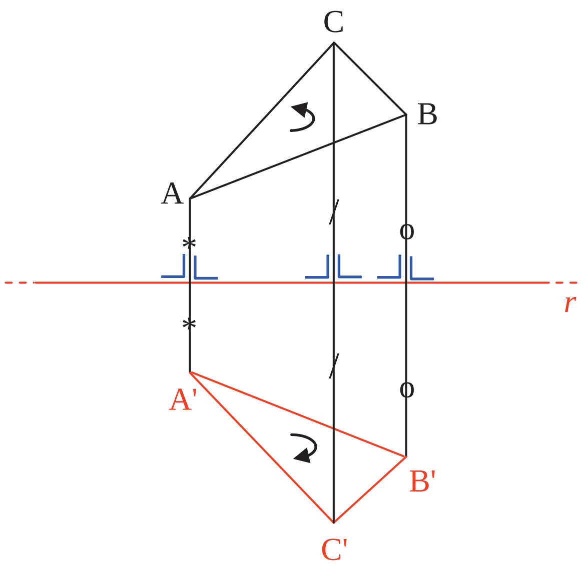


fig. 9

OSSERVAZIONE:

L'esame della fig. 9 permette di affermare che la "nostra" trasformazione è inversa in quanto i vertici A, B, C del triangolo ABC si susseguono in verso antiorario mentre i vertici A', B', C' del triangolo trasformato A'B'C' si susseguono in verso orario.

In questa unità ci occuperemo delle trasformazioni geometriche che mantengono inalterate le lunghezze dei segmenti (**isometrie**).

4.3 Le isometrie

Si dice **isometria** o **trasformazione isometrica** una trasformazione del piano in sé che conserva la distanza.

In altre parole, l'isometria è una trasformazione geometrica che associa a due punti qualsiasi A e B del piano i punti A' e B', dello stesso piano, tali che $AB \cong A'B'$ [L'isometria ha, quindi, come invariante la **distanza** fra i punti, cioè "*la distanza fra due punti è congruente alla distanza fra le loro immagini*"] (fig. 10):

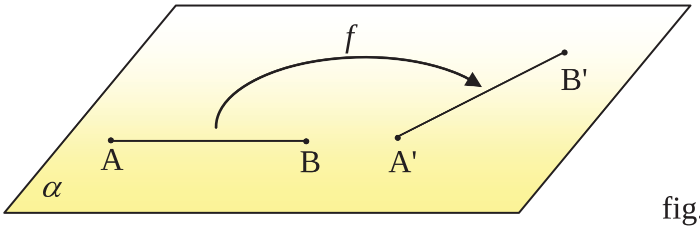


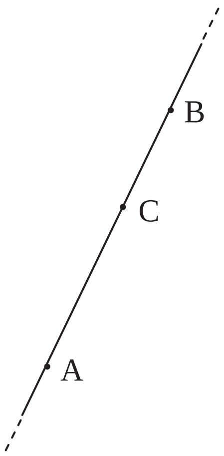
fig. 10

Due figure che si corrispondono in una isometria si dicono **isometriche**.

Determiniamo gli elementi invarianti per isometria, dimostrando alcuni teoremi.

TEOREMA

Siano A, B e C tre punti allineati, con C interno al segmento AB e sia *f* un'isometria. Allora i trasformati A', B' e C' sono allineati e C' è interno al segmento A'B'.



Hp.: $\begin{cases} A, B, C \text{ punti allineati} \\ C \in AB \\ f \text{ isometria} \\ A' = f(A) \\ B' = f(B) \\ C' = f(C) \end{cases}$

Th.: $\begin{cases} A', B', C' \text{ punti allineati} \\ C' \in A'B' \end{cases}$

Dimostrazione

Siano, per ipotesi, A, B e C tre punti allineati, con C interno al segmento AB.

Si ha, quindi:

$AB \cong AC + CB.$ (*)

Essendo f un'isometria tale che:

$$f: A \to A' ;$$
$$f: B \to B' ;$$
$$f: C \to C' ,$$

risulta:

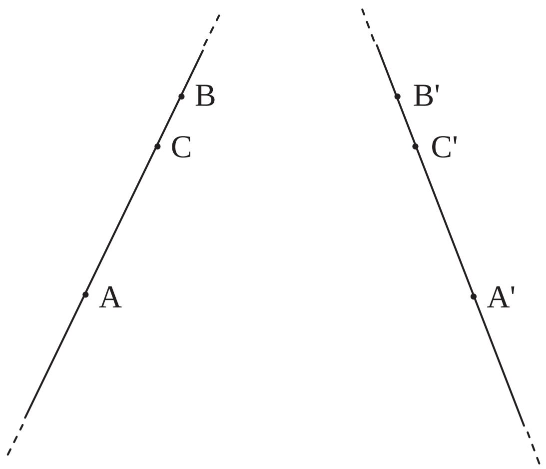
- $AB \cong A'B'$;
- $AC \cong A'C'$;
- $CB \cong C'B'$,

e quindi, sostituendo nella relazione (*), si ha:

$$A'B' \cong A'C' + C'B'. \qquad (**)$$

La relazione (**) ci assicura che i punti A', B' e C' sono allineati e che C' è interno al segmento A'B' (**perché?**).

La figura seguente "illustra" il teorema precedente:



Si dice anche che:

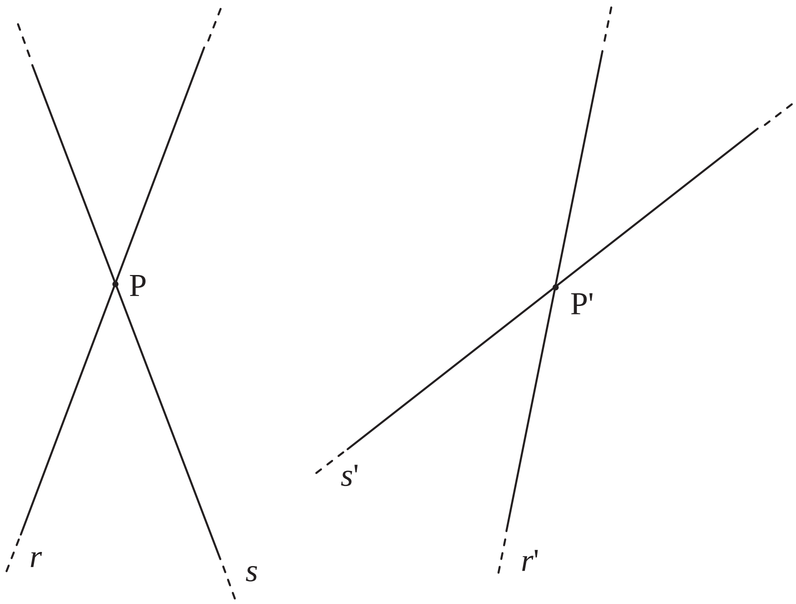
Ogni isometria è una collineazione.

COROLLARIO

Ogni isometria trasforma una retta in una retta.

TEOREMA

In ogni isometria a rette incidenti corrispondono rette incidenti.



Hp.: $\begin{cases} r \cap s = \{P\} \\ f \text{ isometria} \\ r' = f(r) \\ s' = f(s) \\ P' = f(P) \end{cases}$

Th.: $r' \cap s' = \{P'\}$

Dimostrazione

Sappiamo che:

$$r \cap s = \{P\}$$

e che f è un'isometria tale che:

$$f : r \to r' ;$$

$$f : s \to s' ;$$

$$f : P \to P' .$$

Quindi:

$P \in r \Rightarrow P' \in r'$ (perché l'isometria trasforma una retta in una retta);

$P \in s \Rightarrow P' \in s'$ (perché l'isometria trasforma una retta in una retta),

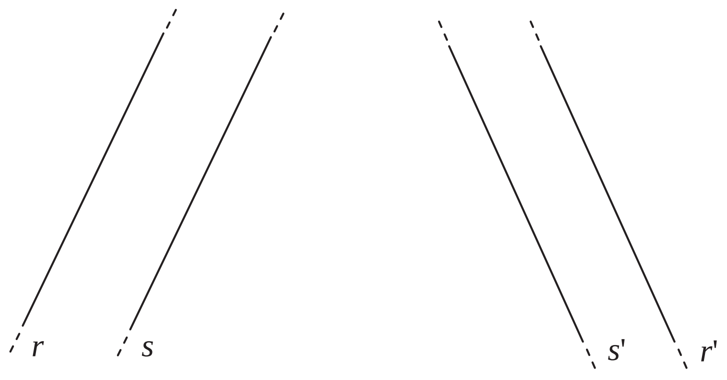
per cui:

$$r' \cap s' = \{P'\}.$$

C.V.D.

TEOREMA

In ogni isometria a rette parallele e distinte corrispondono rette parallele.



$$\text{Hp.:} \begin{cases} r \,//\, s\,,\ r \neq s \\ f \ \text{isometria} \\ r' = f(r) \\ s' = f(s) \end{cases}$$

Th.: $r' \,//\, s'$

Dimostrazione

Sappiamo che:

$r \,//\, \mathrm{s}$

e che f è un’isometria tale che:

$f : r \to r'$

$f : s \to s'$.

Dobbiamo dimostrare che $r' \,//\, s'$.

Supponiamo, per assurdo, che le rette r' e s' non siano parallele ma siano incidenti.

Sia, cioè:

$r' \cap s' = \{P'\}$ (fig. 11):

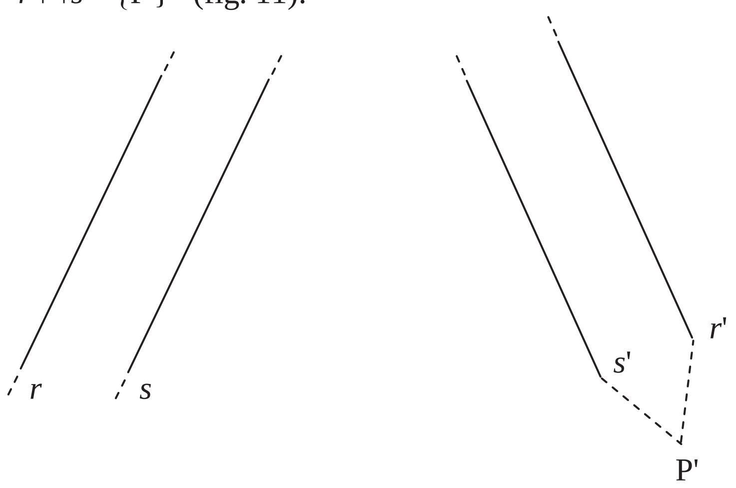


fig. 11

Detto P il punto del piano tale che:

$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$,

si avrebbe che:

$\mathrm{P} \in r \wedge \mathrm{P} \in s$ (dal momento che l’immagine di una retta mediante una isometria è una retta) e quindi:

$P \in r \cap s \ \wedge \ r \neq s.$

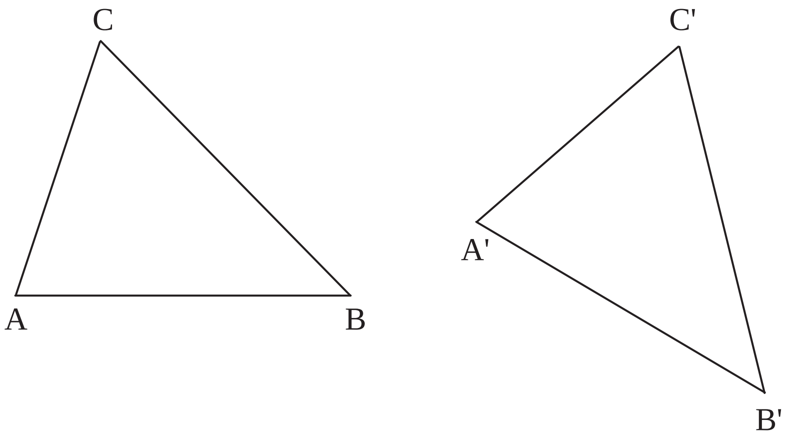
Ciò è assurdo perché contrasta con l’ipotesi che *r* // *s*. Pertanto deve essere:

$r' \,//\, s'.$

C.V.D.

TEOREMA

Ogni isometria trasforma un triangolo in un triangolo ad esso congruente.



$$\text{Hp.:}\ \begin{cases} \text{ABC triangolo} \\ f \ \text{isometria} \\ A' = f(A) \\ B' = f(B) \\ C' = f(C) \end{cases}$$

$$\text{Th.:}\quad \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

Dimostrazione

Per ipotesi, ABC è un triangolo ed f un’isometria tale che:

$f : A \to A'$;

$f : B \to B'$;

$f : C \to C'$.

Consideriamo i triangoli ABC e A'B'C'; essi hanno:

$AB \cong A'B'$ perché f isometria;

$BC \cong B'C'$ perché f isometria;

$CA \cong C'A'$ perché f isometria.

I due triangoli, avendo i tre lati ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 3° criterio di congruenza dei triangoli.

C.V.D.

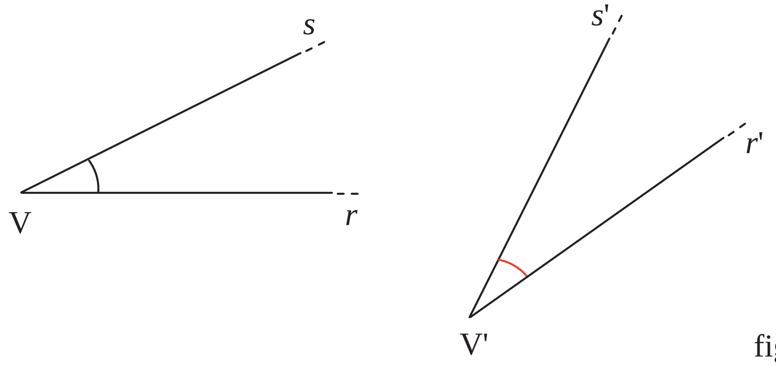
OSSERVAZIONE:

Da quanto sopra, discende che gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ del triangolo ABC sono congruenti, rispettivamente, agli angoli $\widehat{A}'$, $\widehat{B}'$ e $\widehat{C}'$ del triangolo trasformato A'B'C'.

Questa considerazione porta a concludere che l’isometria conserva gli angoli.

[Procediamo, comunque, nella dimostrazione “diretta” del TEOREMA:

Ogni isometria trasforma un angolo in un angolo ad esso congruente (fig. 12):



Hp.: $\begin{cases} f \text{ isometria} \\ f : \widehat{rs} \to \widehat{r's'} \end{cases}$

Th.: $\widehat{rs} \cong \widehat{r's'}$

fig. 12

Dimostrazione

Sia f un’isometria tale che:

$r' = f(r)$;

$s' = f(s)$.

Poiché:

$r \cap s = \{V\}$,

si ha:

$r' \cap s' = \{V'\} \wedge V' = f(V)$ (perché, in un’isometria, a rette incidenti corrispondono rette incidenti).

Ora, consideriamo sulle semirette r ed s, rispettivamente, i punti A e B ed indichiamo con A' e B' i loro trasformati nell’isometria f.

Si ha:

$A \in r \Rightarrow A' \in r'$

$B \in s \Rightarrow B' \in s'$ (fig. 13):

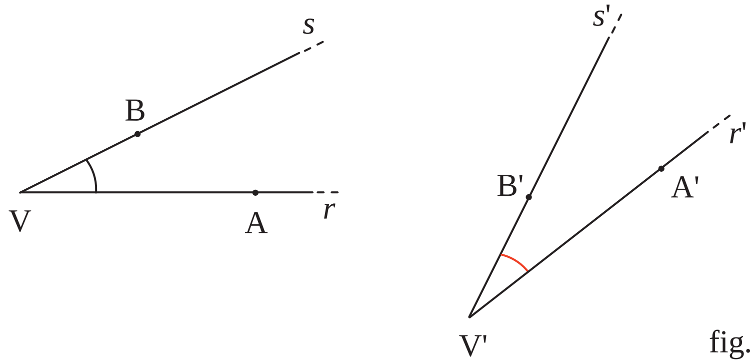


fig. 13

Consideriamo i triangoli VAB e V'A'B' (fig. 14):

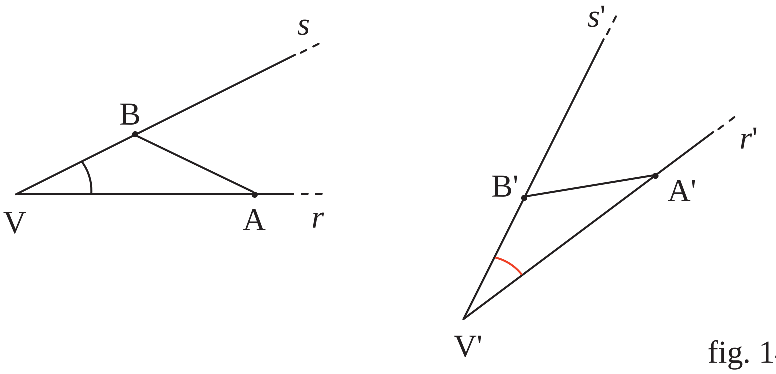


fig. 14

COMPLETA:

Essi hanno:

VA ≅ V'A' perché ……………………………………

………… perché ……………………………………

………… perché ……………………………………

I due triangoli, avendo ………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………….. .

C.V.D.]

COROLLARIO

Le isometrie conservano la perpendicolarità.

Le osservazioni precedenti permettono la seguente generalizzazione:

"due figure che si corrispondono in un'isometria sono sempre congruenti, perché i lati e gli angoli corrispondenti sono congruenti"

e, viceversa:

"se due figure sono congruenti, tutti gli elementi (*lati ed angoli*) sono ordinatamente congruenti e quindi esiste una trasformazione del piano (*un'isometria*), che associa ogni punto al suo corrispondente nella congruenza".

Possiamo pertanto concludere che:

<u>Due figure isometriche sono congruenti e, viceversa, se due figure sono congruenti esiste una isometria nella quale le due figure si corrispondono</u>.

Riassumendo si ha che gli invarianti di una isometria sono:

- la lunghezza dei segmenti;
- l’allineamento dei punti;
- l’incidenza tra rette;
- il parallelismo;
- l’ampiezza degli angoli.

Le isometrie del piano si possono classificare in:

- simmetria assiale;
- simmetria centrale;
- traslazione;
- rotazione.

4.4 La simmetria assiale

Fissata una retta *r* del piano, si dice **simmetria assiale** (o **simmetria di asse *r***) la trasformazione geometrica, indicata con $\boldsymbol{\sigma_r}$, che "associa" ad un punto P del piano il punto P', dello stesso piano, tale che la retta *r* sia asse del segmento PP' (fig. 15):

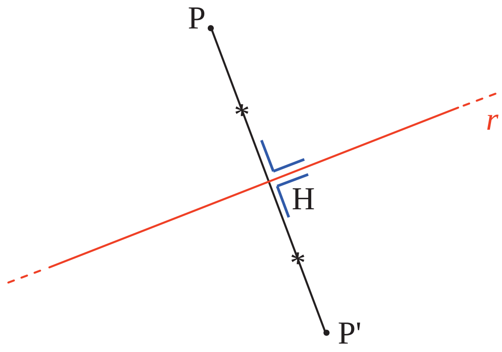


fig. 15

- *r* è l'asse di simmetria;
- P' è il simmetrico di P rispetto alla retta *r* [σ_r (P) = P'].

Ad ogni punto di un piano è, quindi, possibile *associare* il suo simmetrico rispetto alla retta *r*. Tale "*associazione*" è una corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano e, perciò, è una trasformazione geometrica.

Se $P \in r$, allora σ_r (P) = P ; quindi ogni punto di *r* è simmetrico di se stesso rispetto ad *r*, cioè i punti dell'asse di simmetria sono punti **uniti** della trasformazione.

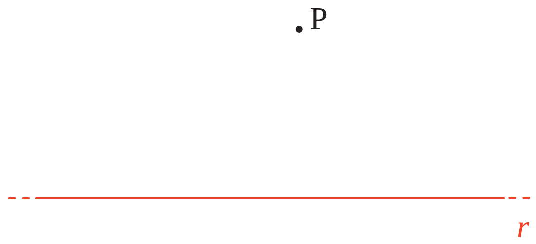
Pertanto: $\sigma_r(r) = r$, cioè *r* è una retta unita, luogo dei punti uniti.

L'asse di simmetria è retta unita, luogo di punti uniti.

Per determinare la figura $\mathbb{F}'$, simmetrica di una generica figura $\mathbb{F}$ rispetto ad un asse *r*, si deve determinare il simmetrico, rispetto ad *r*, di ogni suo punto.

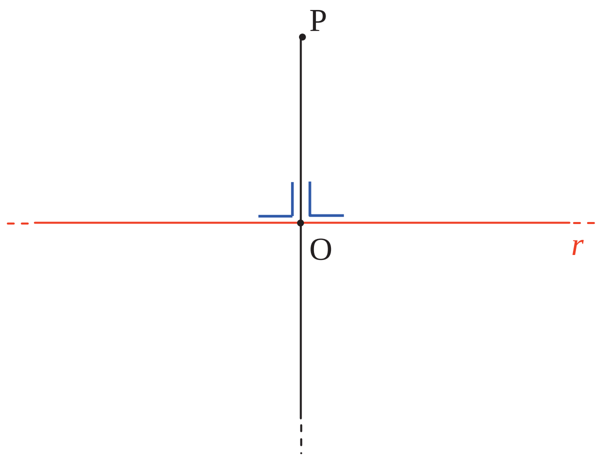
L'operazione risulta facilitata nel caso che $\mathbb{F}$ sia una figura particolare (punto, segmento, retta, poligono, …), come si osserva negli esempi seguenti. [Procediamo nella costruzione di figure simmetriche, rispetto ad un asse *r*, di date figure, prima ancora di dimostrare teoremi che, spesso, *sono alla base* del modo stesso di operare].

a) <u>Costruzione del simmetrico di un punto P rispetto ad una data retta *r* (*asse di simmetria*)</u>.

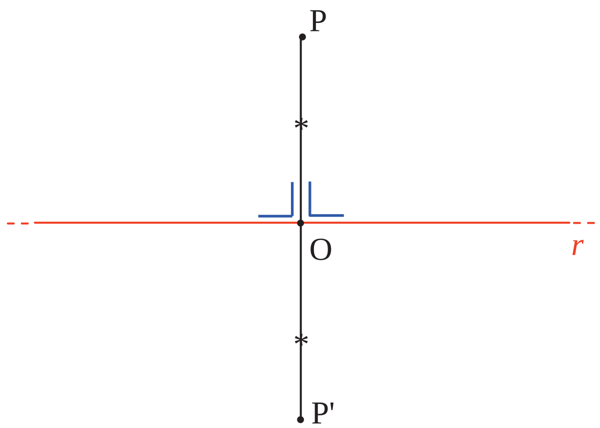


Segui il seguente procedimento:

1) conduci per il punto P la retta perpendicolare all'asse di simmetria ed indica con O il loro punto d'incontro.



2) prendi su tale perpendicolare, *sulla semiretta opposta a OP*, il punto P' tale che P'O $\cong$ PO:



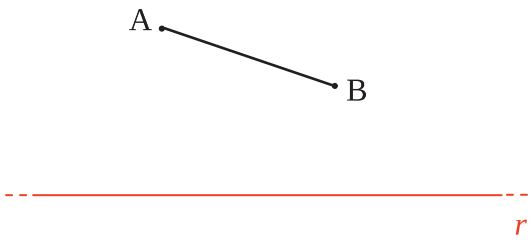
$P' = \sigma_r (P)$

Il punto P' è il simmetrico del punto P rispetto all'asse di simmetria.

Quindi possiamo dire che:

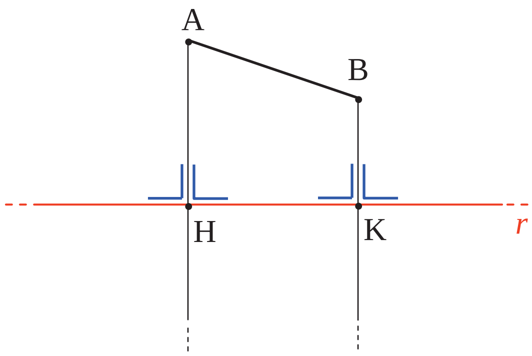
Il punto P', simmetrico di P rispetto all'asse di simmetria *r*, si trova sulla perpendicolare ad *r* condotta da P, ad uguale distanza da *r*, nel semipiano individuato da *r* non contenente P.

b) <u>Costruzione del simmetrico di un segmento AB rispetto ad una data retta *r* (*asse di simmetria*)</u>.

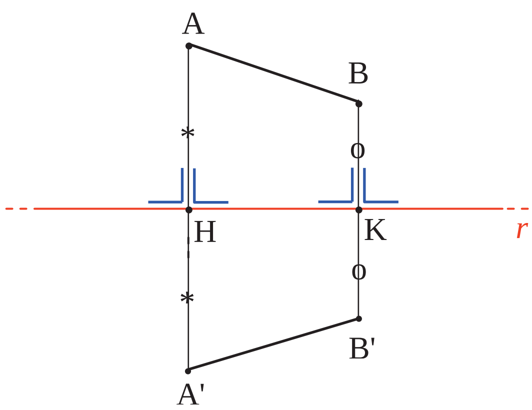


Segui il seguente procedimento:

1) conduci dai punti A e B le rette perpendicolari all'asse di simmetria ed indica con H e K, rispettivamente, i punti di incontro di tali perpendicolari con *r* :



2) prendi su tali perpendicolari, sulle semirette opposte ad HA e a KB, rispettivamente, i punti A' e B' tali che A'H ≅ AH e B'K ≅ BK.



$A'B' = \sigma_r\ (AB)$

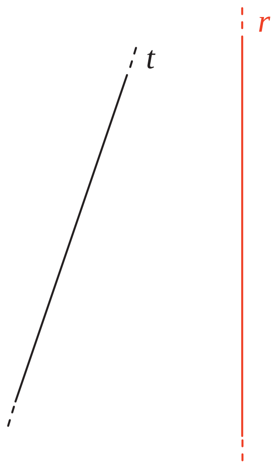
Il segmento A'B' è il simmetrico del segmento AB rispetto all'asse di simmetria *r*.

(*Si comprende facilmente che abbiamo applicato, agli estremi del segmento dato, il procedimento di cui al punto* a).

c) <u>Costruzione della simmetrica di una retta *t* rispetto ad una data retta *r* (*asse di simmetria*)</u>.

(**<u>PROVA TU</u>**)

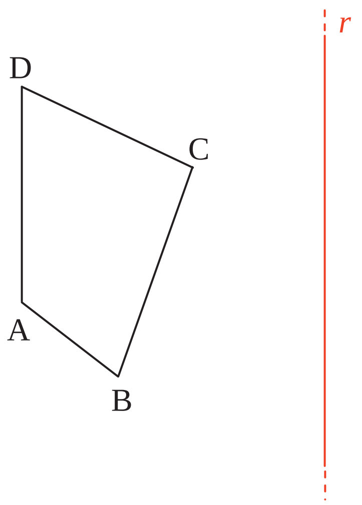
[Basta prendere due punti sulla retta *t*, trovare i suoi simmetrici e disegnare la retta *u* che passa per tali punti].



COMPLETA ……= σ_r (*t*)

La retta …. è ………………..... della ………….. rispetto ………..

d) <u>Costruzione del simmetrico di un poligono ABCD rispetto ad una data retta *r* (*asse di simmetria*)</u>.



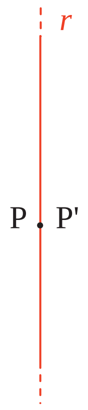
<u>PROVA TU</u>, procedendo come ai punti a) e b) e

COMPLETA ……… = σ_r (ABCD)

Il ……………………………………… è il simmetrico del …………………………. ………………………………….................

Casi particolari:

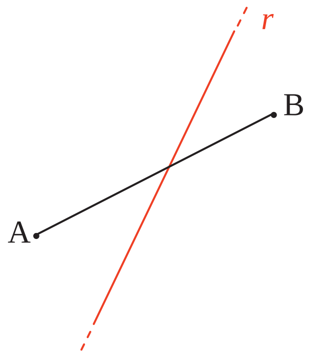
e) Costruzione del simmetrico di un punto P appartenente all'asse di simmetria.



$P' \equiv P$

quindi $\sigma_r\,(P) = \ldots$

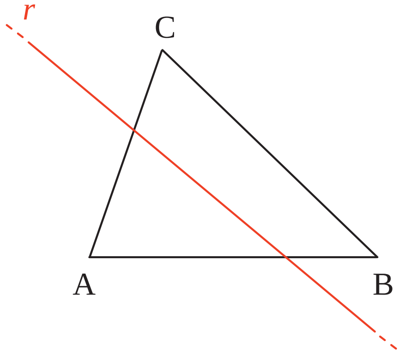
f) Costruzione del simmetrico di un segmento AB che "attraversa" l'asse di simmetria.



Conduci dai punti A e B le rette perpendicolari all'asse di simmetria ………. **CONTINUA**.

Cosa osservi al termine della costruzione?

g) Costruzione del simmetrico di un poligono con qualche lato che "attraversa" l'asse di simmetria (*in figura il poligono è il triangolo ABC*).



PROVA TU, procedendo ………. come al solito.

Cosa osservi al termine della costruzione?

TEOREMA

La simmetria assiale è un'isometria.

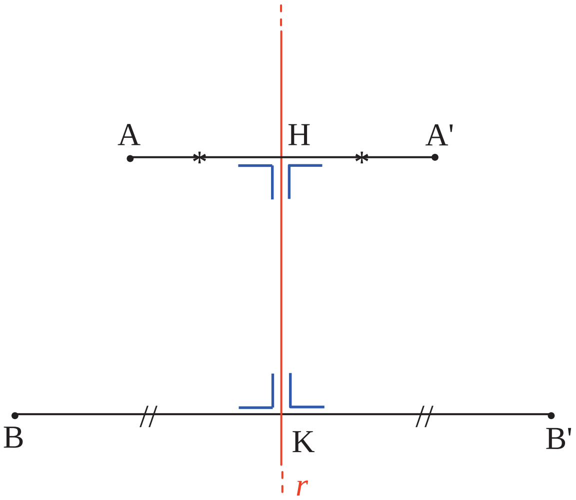
Hp.: σ_r simmetria assiale

Th.: σ_r isometria

Dobbiamo dimostrare che σ_r ha come invariante la lunghezza dei segmenti.

A tale scopo, fig. 16, siano:

- A e B due punti qualsiasi del piano;
- r una retta;
- $A' = \sigma_r(A)$ il simmetrico di A rispetto ad r;
- $B' = \sigma_r(B)$ il simmetrico di B rispetto ad r.



$AA' \perp r$

$AH \cong A'H$

$BB' \perp r$

$BK \cong B'K$

fig. 16

Dobbiamo, quindi, dimostrare che:

$AB \cong A'B'$ (*per evitare "confusione" non uniamo, per ora, A con B, né A' con B'*).

Consideriamo i triangoli AHK e A'HK (fig. 17):

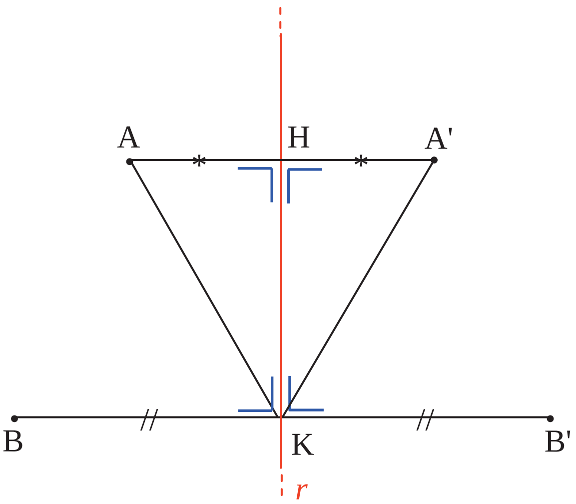


fig. 17

Essi hanno:

$AH \cong A'H$	perché A' simmetrico di A rispetto ad *r* ;
HK	in comune (o $HK \cong HK$ per la proprietà riflessiva della congruenza).
$A\widehat{H}K \cong A'\widehat{H}K$	perché entrambi retti;

I due triangoli, avendo due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli (o *per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli*). Avranno, pertanto, tutti gli altri elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$AK \cong A'K$	("*segnare AK e A'K con il simbolo* o ");
$A\widehat{K}H \cong A'\widehat{K}H$	(*segnare $A\widehat{K}H$ e $A'\widehat{K}H$ con il simbolo* •).

La fig. 18 illustra la situazione "attuale":

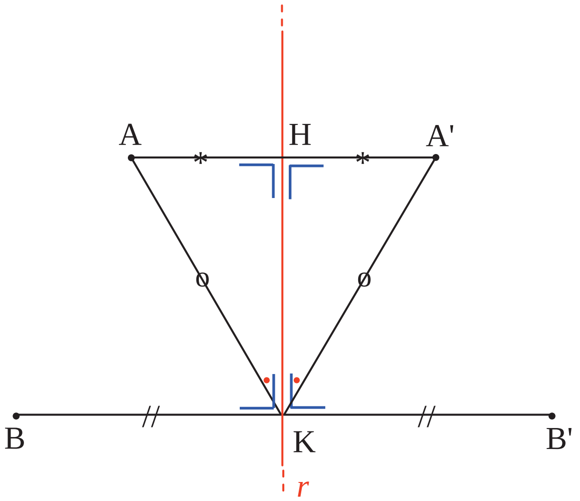


fig. 18

Uniamo, ora, A con B e A' con B' e consideriamo i triangoli ABK e A'B'K' (fig. 19):

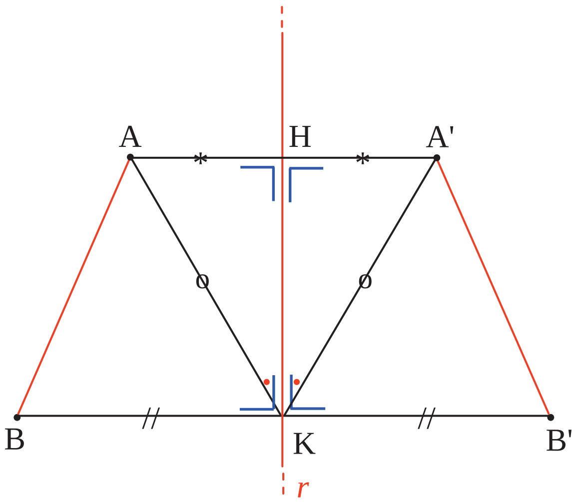


fig. 19

Essi hanno:

$AK \cong A'K'$	per precedente dimostrazione;
$BK \cong B'K$	perché B' simmetrico di B rispetto ad r;
$A\widehat{K}B \cong A'\widehat{K}B'$	perché complementari di angoli congruenti ($B\widehat{K}H \cong B'\widehat{K}H$ entrambi retti e $A\widehat{K}H \cong A'\widehat{K}H$ per precedente dimostrazione).

I due triangoli, avendo due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli altri elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$AB \cong A'B'$.

C.V.D.

Questo teorema permette di concludere che due figure che si corrispondono in una simmetria assiale sono congruenti.

PROVA TU a dimostrare la congruenza dei triangoli ABC e ABD (fig. 20), che si corrispondono nella simmetria di asse la retta AB, senza utilizzare i criteri di congruenza dei triangoli.

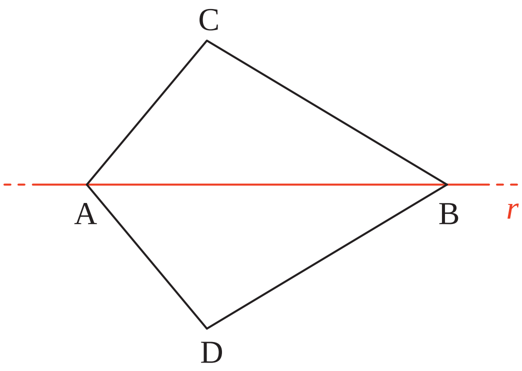


fig. 20

Riferendoti anche al teorema precedente e alla relativa figura, **PROVA TU** che la simmetria assiale, in quanto isometria, gode di tutte le proprietà delle isometrie; precisamente ha come invarianti:

- la lunghezza dei segmenti;
- l'allineamento dei punti;
- l'incidenza tra rette;
- il parallelismo;
- l'ampiezza degli angoli.

Inoltre, la simmetria assiale gode delle seguenti proprietà:

- **una retta a, incidente l'asse di simmetria in un punto P e che forma un angolo α con tale asse (fig. 21), ha per trasformata una retta a', che interseca l'asse sempre in P e forma con esso un angolo congruente ad α.**

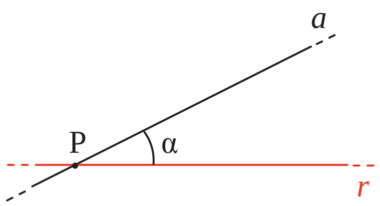


fig. 21

$$\text{Hp.: } \begin{cases} \sigma_r \text{ simmetria assiale di asse } r \\ a \cap r = \{P\} \\ \sigma_r : a \to a' \end{cases}$$

$$\text{Th.: } \begin{cases} a' \cap r = \{P\} \\ \widehat{a'r} \cong \widehat{a\,r} \end{cases}$$

Dimostrazione

Si ha che:

$\sigma_r : a \to a'$ per ipotesi;

$\sigma_r : r \to r$ poiché l'asse è una retta unita;

$a \cap r = \{P\}$ per ipotesi;

$\sigma_r : P \to P$ poiché i punti dell'asse sono punti uniti,

e quindi:

$a' \cap r = \{P\}$ poichè in una isometria a rette incidenti corrispondono rette incidenti;

$\widehat{a'r} \cong \widehat{a\,r}$ poichè in una isometria ad ogni angolo corrisponde un angolo ad esso congruente.

Pertanto si ha (fig. 22):

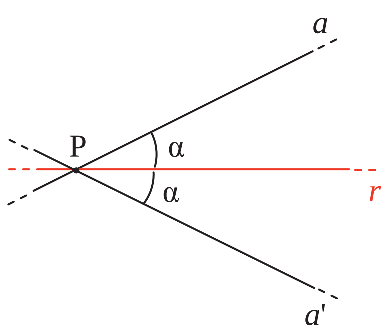
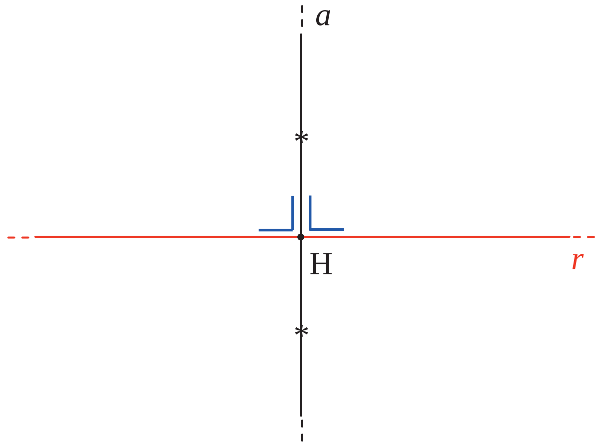


fig. 22

C.V.D.

- **una retta *a*, perpendicolare all'asse di simmetria *r*, ha per trasformata se stessa** (fig. 23).



$$\text{Hp.:}\begin{cases}\sigma_r \text{ simmetria assiale di asse } r \\ a \perp r\end{cases}$$

$$\text{Th.:}\quad \sigma_r : a \rightarrow a$$

fig. 23

Dimostrazione

Ogni punto P di *a*, per definizione di simmetria assiale, è trasformato in un punto P', appartenente alla retta passante per P e perpendicolare all'asse *r*, con $P'H \cong PH$ (fig. 24):

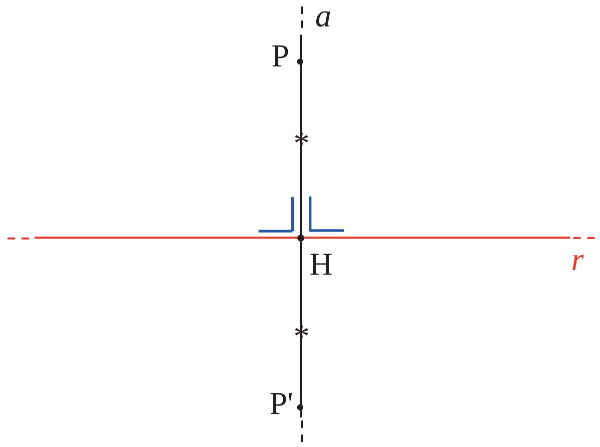


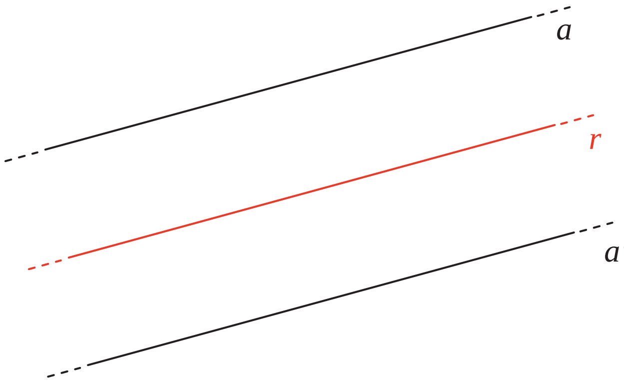
fig. 24

Vista l'unicità della retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data, il punto P' deve appartenere necessariamente ad *a*. Pertanto la retta *a* contiene il trasformato di ogni suo punto e, dunque, è una retta unita.

ATTENZIONE

Osserviamo che la retta unita *a* **non** è una retta luogo di punti uniti perché ciascun punto della retta non ha per trasformato se stesso (*l'unico punto unito è il punto d'intersezione della retta a con l'asse di simmetria r*). E' evidente che in una simmetria assiale tutte le rette perpendicolari all'asse di simmetria sono rette unite (*e, quindi, esistono infinite rette unite*).

- **una retta *a*, parallela all'asse di simmetria *r*, ha per trasformata una retta *a*', anch'essa parallela alla retta *r*** (*e, quindi, a*' // *a*) [fig. 25].



Hp.: $\begin{cases} \sigma_r \text{ simmetria assiale di asse } r \\ \sigma_r : a \rightarrow a' \\ a \,//\, r\,. \end{cases}$

Th.: $a' \,//\, r$

fig. 25

Dimostrazione

Poiché:

$a \,//\, r$ per ipotesi,

si ha che i punti di *a* sono equidistanti da *r* e quindi, presi due generici punti P e Q su *a*, si ha che:

PH ≅ QK (fig. 26):

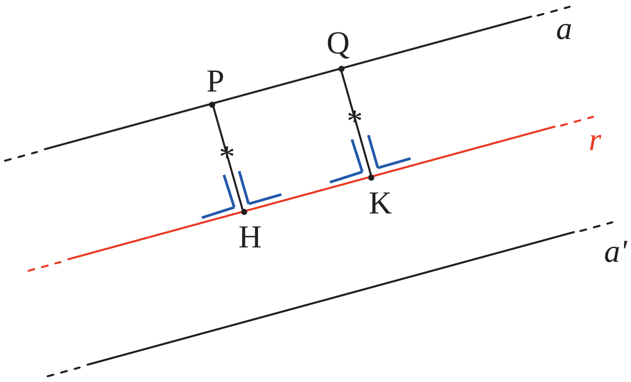


fig. 26

Inoltre:

$\sigma_r : a \rightarrow a'$ per ipotesi,

per cui:

PH ≅ P'H e QK ≅ Q'K (fig. 27):

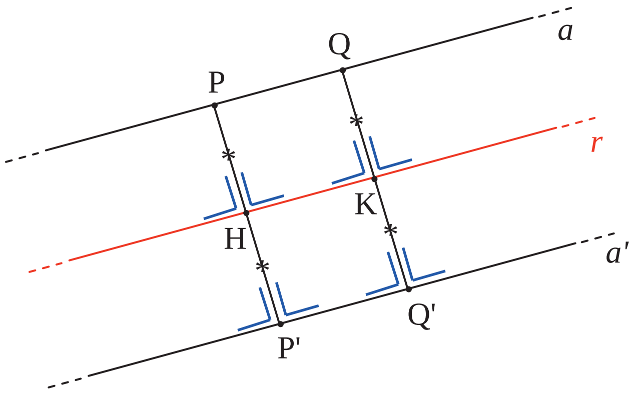


fig. 27

Pertanto, per la proprietà transitiva della congruenza, si ha che:

$$P'H \cong Q'K$$

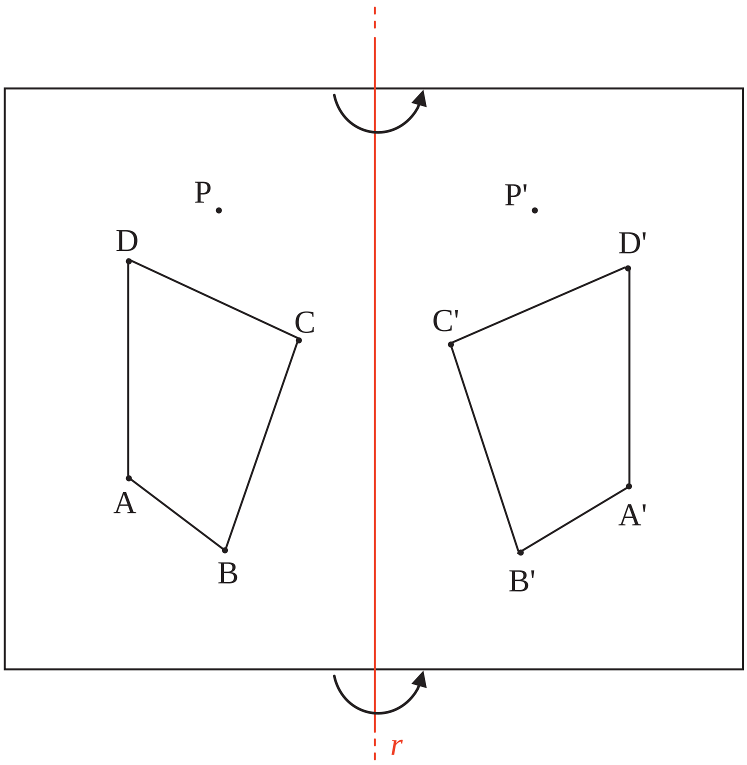
e quindi:

$$a' \,//\, r$$

C.V.D.

Le proprietà esaminate, risultano di più facile comprensione se la simmetria assiale viene interpretata come "un ribaltamento" del nostro foglio di lavoro, dove l'asse di simmetria è la retta che contiene la piegatura del foglio.

In tale ottica sono "visti", nella figura che segue, i corrispondenti del punto P e del quadrilatero ABCD nella simmetria di asse *r* (*ripiegando il foglio su se stesso, il punto P e il quadrilatero ABCD si sovrapporranno rispettivamente al punto P' e al quadrilatero A'B'C'D'*).



OSSERVAZIONE:

L'esame della figura precedente ci permette di concludere che la simmetria assiale **non conserva** l'orientamento dei punti: per sovrapporre il quadrilatero ABCD al quadrilatero A'B'C'D', si deve operare un ribaltamento attorno alla retta *r* (**non** si può "rimanere" nel piano del foglio ma bisogna "uscire" da esso).

Osserviamo, ora, la fig. 28:

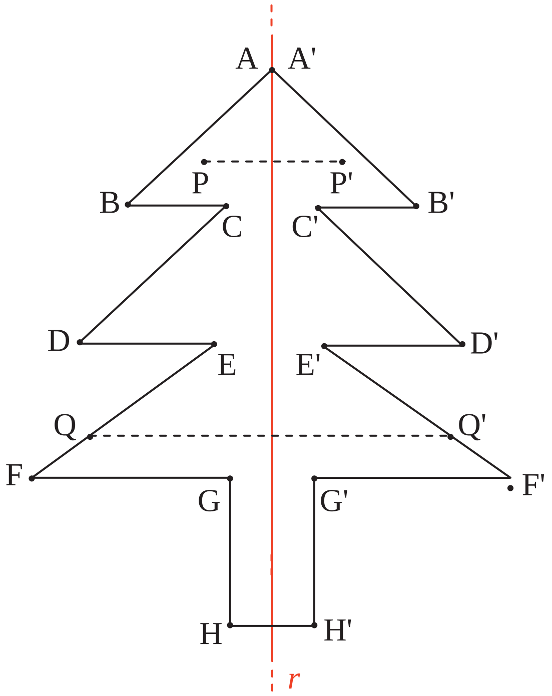


fig. 28

Se consideriamo la simmetria di asse *r*, ogni punto della nostra figura ha come corrispondente un punto che appartiene sempre alla figura, cioè la simmetrica della figura $\mathbb{F}$ è $\mathbb{F}$ stessa: $\mathbb{F}$ *è una figura unita nella simmetria di asse r*.

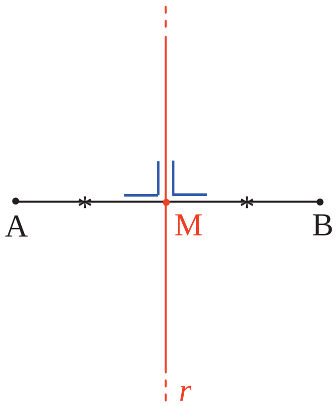
Diciamo allora che:

una figura $\mathbb{F}$ possiede un **asse di simmetria** *r*, o che $\mathbb{F}$ è simmetrica rispetto ad *r*, se essa è unita rispetto alla simmetria di asse *r*.

In simboli: $P \in \mathbb{F} \leftrightarrow \sigma_r(P) \in \mathbb{F}$.

Esempi di figure che possiedono assi di simmetria:

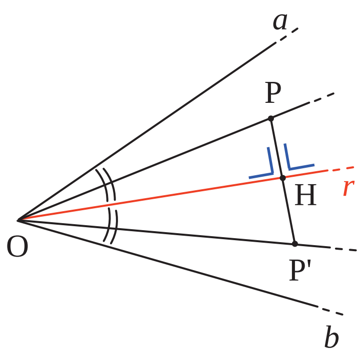
- Il **segmento** ha come asse di simmetria il suo **asse**.



Infatti:

σ_r (AB) = BA ed M è il punto unito della trasformazione.

- Un **angolo** ha come asse di simmetria la sua **bisettrice**.



Infatti:

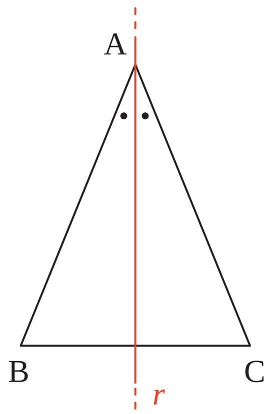
$$\sigma_r(a) = b \quad \text{perché} \quad \widehat{ar} \cong \widehat{br} \quad \text{ed} \;\; O \;\; \text{è il punto unito della trasformazione.}$$

Inoltre il trasformato di un qualsiasi punto P interno all'angolo è ancora un punto interno in quanto deve essere:

$$P\hat{O}H \cong P'\hat{O}H.$$

Dal momento che ogni punto dell'angolo ha per simmetrico un punto che appartiene ancora all'angolo, la bisettrice è asse di simmetria.

- Un **triangolo** ha asse di simmetria solo se è **isoscele**.



In questo caso l'asse è la retta della bisettrice dell'angolo al vertice del triangolo (che è anche altezza e mediana relativa alla base).

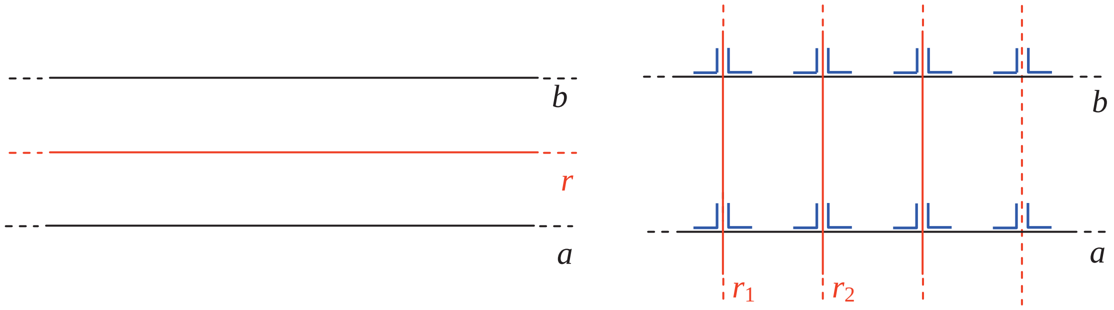
Infatti, nel triangolo ABC, isoscele sulla base BC, indicata con r la retta della bisettrice dell'angolo al vertice A, si ha:

$$\sigma_r(A) = A \quad e \quad \sigma_r(B) = C$$

per cui il simmetrico di ciascuno dei tre vertici è ancora un vertice del triangolo.

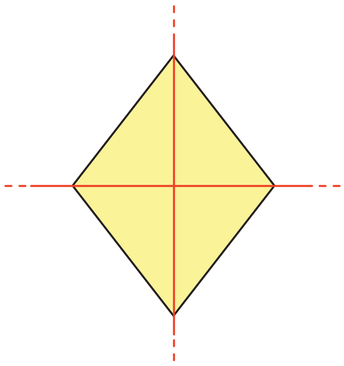
[Un triangolo **equilatero** ha, quindi, tre assi di simmetria perché è isoscele rispetto a ciascuno dei suoi lati, assunti come base: le rette delle tre bisettrici (o, è lo stesso dire, delle tre altezze o delle tre mediane) sono gli assi di simmetria].

- Una **striscia**, individuata da due rette parallele *a* e *b*, ha come asse di simmetria la retta *r*, parallela ad *a* e *b*, tale che la sua distanza da *a* sia congruente alla sua distanza da *b* e, essendo illimitata, anche ciascuna delle rette perpendicolari alle rette *a* e *b*.

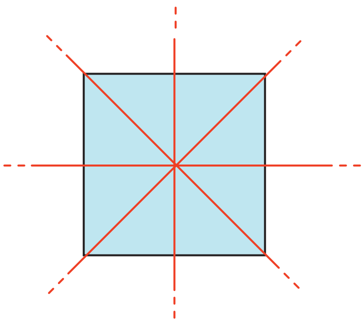


Seguono altri esempi di figure, oggetto di studio nelle prossime unità, ……. *ma che già conosci*, e che possiedono assi di simmetria.

- Un **rombo** ha due assi di simmetria: **le rette a cui appartengono le diagonali**.



- Un **quadrato** ha quattro assi di simmetria: **gli assi dei lati paralleli e le rette cui appartengono le diagonali.**



PROVA TU a fare altri esempi di figure che possiedono un asse di simmetria.

4.5 La simmetria centrale

Fissato nel piano un punto O, la **simmetria centrale** di centro O, indicata con σ_O, è la trasformazione geometrica che ad ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che O sia il punto medio del segmento PP' (fig. 29):

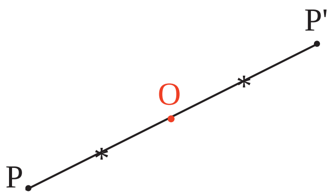


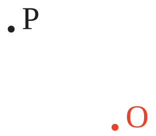
fig. 29

- Il punto O si dice **centro di simmetria**.
- I punti P e P' si dicono **simmetrici** rispetto ad O.

Così come per la simmetria assiale, per determinare la figura $\mathbb{F}'$, simmetrica di $\mathbb{F}$ rispetto ad un centro O, si deve determinare il simmetrico, rispetto ad O, di ogni suo punto.

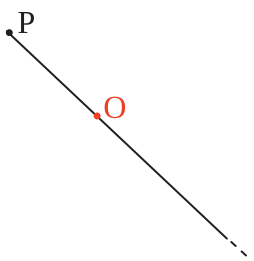
Anche qui, l'operazione risulta facilitata nel caso che $\mathbb{F}$ sia una figura particolare (punto, segmento, retta, poligono …), come risulta dagli esempi seguenti. [Procediamo, come per la simmetria assiale, nella costruzione di figure simmetriche di date figure, rispetto ad un centro O, prima ancora di dimostrare teoremi che spesso *sono alla base* del modo stesso di operare].

I. <u>Costruzione del simmetrico di un punto P rispetto al punto fissato O (*centro di simmetria*)</u>.

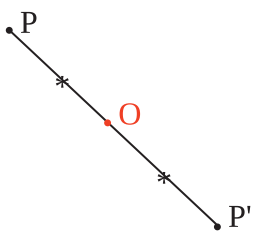


Segui il seguente procedimento:

1) conduci da P la retta passante per O:

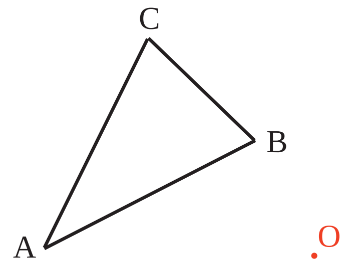


2) prendi su tale retta, sulla semiretta opposta a OP, il punto P' tale che $P'O \cong PO$:



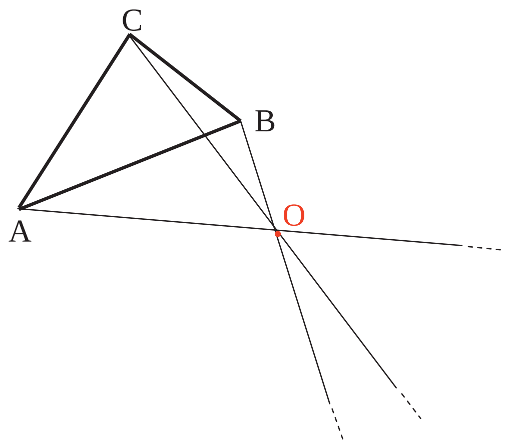
Il punto P' è il simmetrico del punto P rispetto al centro di simmetria.

II. <u>Costruzione del simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto fissato O (*centro di simmetria*)</u>.

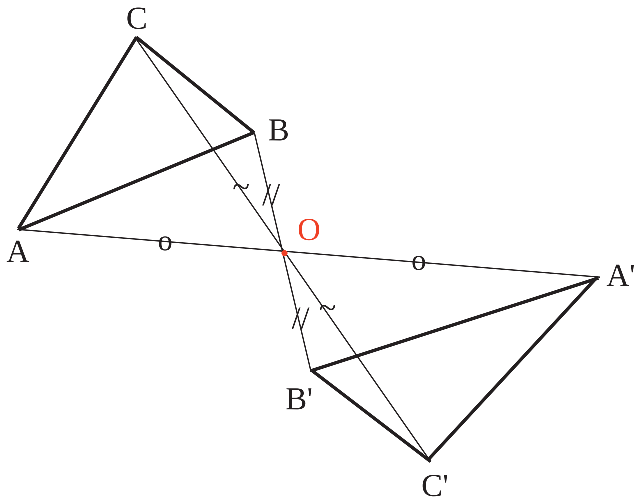


Segui il seguente procedimento:

1) conduci per A, B e C le rette passanti per O:



2) sulla retta condotta da A prendi il punto A' tale che A'O ≅ AO (cioè O è punto medio di AA') e così sulle altre rette: B'O ≅ BO e C'O ≅ CO:



Il triangolo A'B'C' è il simmetrico del triangolo ABC rispetto al centro di simmetria (**simmetria centrale**).

Basta ripetere il procedimento di cui al punto I. per i vertici del triangolo (e, in generale, di qualsiasi altra figura).

La simmetria centrale **conserva** l'orientamento dei punti: per portare il triangolo ABC a coincidere col trasformato A'B'C' *non si esce* dal piano del foglio [**<u>PROVA TU</u>** con un foglio di carta lucida].

TEOREMA

La simmetria centrale è un'isometria.

Hp.: σ_O simmetria centrale

Th.: σ_O isometria

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che σ_O ha come invariante la lunghezza dei segmenti.

A tale scopo, fig. 30, siano:

- A, B e O tre punti;
- $A' = \sigma_O(A)$ il simmetrico di A rispetto ad O;
- $B' = \sigma_O(B)$ il simmetrico di B rispetto ad O.

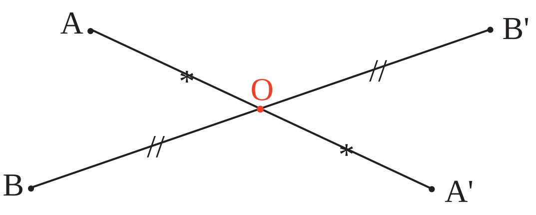


fig. 30

Dobbiamo, quindi, dimostrare che: $AB \cong A'B'$.

Consideriamo, a tale scopo, i triangoli ABO e A'B'O (fig. 31):

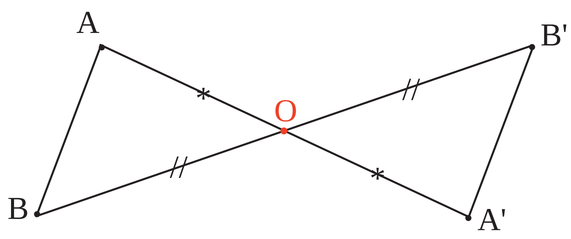


fig. 31

Essi hanno:

$AO \cong A'O$	perché A e A' simmetrici rispetto ad O;
$BO \cong B'O$	perché B e B' simmetrici rispetto ad O;
$A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B'$	perché angoli opposti al vertice.

I due triangoli, avendo due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli altri elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$AB \cong A'B'$.

C.V.D.

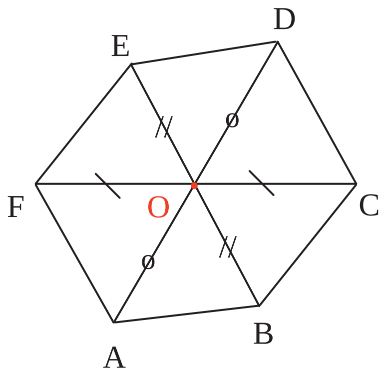
Questo teorema permette di concludere che due figure simmetriche rispetto ad un punto sono congruenti.

Inoltre, riferendoti anche al teorema precedente e alla relativa figura, **PROVA TU** che:

- due segmenti [rette] che si corrispondono in una simmetria centrale sono paralleli [parallele];
- il centro di simmetria è l'unico punto unito;
- esistono infinite rette unite (*sono le rette che passano per il centro*) che non sono, però, luogo di punti uniti;
- la simmetria centrale è involutoria;
- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- a due rette incidenti, che formano un angolo α, corrispondono due rette incidenti che formano un angolo congruente ad α;
- l'ordinamento dei punti è invariante.

Anche per le simmetrie assiali, possiamo chiederci se esistono delle figure che restano unite in una simmetria centrale.

In fig. 32, il poligono ABCDEF è unito rispetto alla simmetria che ha centro nel punto O.



Nella σ_O si ha:

$\sigma_O(A) = D$;

$\sigma_O(B) = E$;

$\sigma_O(C) = F$.

fig. 32

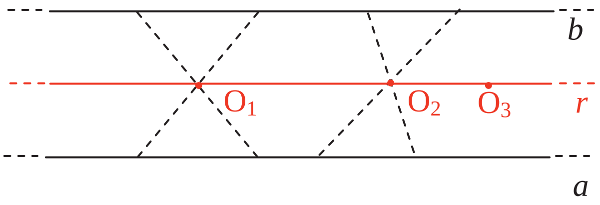
[Quindi:

Una figura $\mathbb{F}$ ha un centro di simmetria se è unita nella simmetria che ha centro in quel punto, cioè se il simmetrico di ogni vertice del poligono è ancora un vertice del poligono].

Esempi di figure che possiedono un centro di simmetria:

- Il **segmento** ha un centro di simmetria: il suo **punto medio**.
  Infatti, dato un segmento AB ed indicato con O il suo punto medio, si ha:
  $\sigma_O(A) = B$ perché $OA \cong OB$.

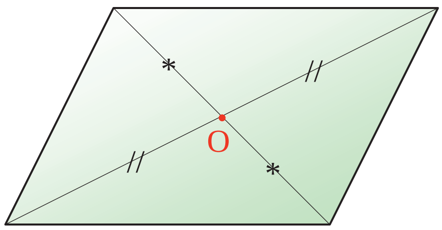
- La **striscia** definita da due rette parallele *a* e *b* ha come centro di simmetria un **qualunque punto** che appartiene al suo asse di simmetria.



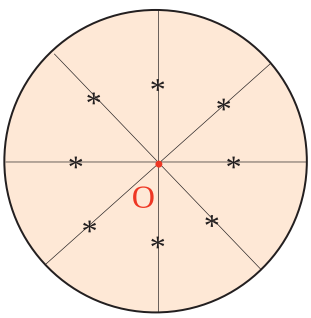
O_1 centro di simmetria della striscia;
O_2 centro di simmetria della striscia;
O_3 centro di simmetria della striscia;
"   "   "   "   "   "   .

Seguono altri esempi di figure che saranno oggetto di studio nelle prossime unità, ……. *ma che già conosci*, e che possiedono un centro di simmetria.

- Il **parallelogramma** ha come centro di simmetria il **punto d'intersezione delle due diagonali**.



- La **circonferenza** ha come centro di simmetria il suo **centro**.



PROVA TU a fare altri esempi di figure che possiedono un centro di simmetria.

4.6 La traslazione

Dato un segmento AB, è possibile fissare su di esso **un verso di percorrenza**, da A verso B o da B verso A (**segmento orientato**).

Indichiamo con:

- $\overrightarrow{AB}$ il segmento orientato da A verso B (figura a lato):

- $\overrightarrow{BA}$ il segmento orientato da B verso A (figura a lato):

Diamo la seguente definizione:

Due segmenti orientati si dicono **equipollenti** se hanno:

- la stessa lunghezza;
- la stessa direzione (*appartengono a rette parallele*);
- lo stesso verso.

Nell'insieme dei segmenti orientati di un piano, la relazione "essere equipollenti" è una relazione di equivalenza, perché gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva (**PROVA TU**).

La relazione di equipollenza suddivide, quindi, i segmenti orientati del piano in classi di equivalenza. Ogni classe è chiamata **vettore** e contiene tutti e soli i segmenti fra loro equipollenti.

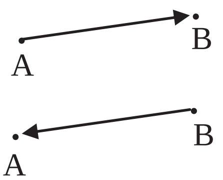
Ogni vettore viene indicato con una lettera sormontata da una freccia, $\vec{v}$, oppure con il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ che lo rappresenta.

Un vettore $\overrightarrow{AB}$ è caratterizzato da:

- il **modulo** o l'**intensità**, che si indica con $|\overrightarrow{AB}|$ o semplicemente AB, cioè la misura della lunghezza del segmento AB;
- la **direzione**, cioè la direzione della retta a cui appartiene il segmento;
- il **verso**.

Inoltre:

- Si chiama **vettore nullo**, e viene indicato $\vec{0}$, il vettore che ha modulo nullo, direzione e verso indeterminati.
- Si chiama **vettore opposto** di un vettore $\overrightarrow{AB}$, e si indica $\overrightarrow{BA}$, il vettore che ha lo stesso modulo, stessa direzione ma verso opposto a quello di $\overrightarrow{AB}$ (fig. 33):



$\overrightarrow{BA}$ opposto ad $\overrightarrow{AB}$

fig. 33

Diamo ora la seguente definizione:

Fissato un vettore $\vec{v}$, si definisce **traslazione** di vettore $\vec{v}$, e si indica $\tau_{\vec{v}}$, una trasformazione geometrica che ad ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che $\overrightarrow{PP'}$ sia equipollente a $\vec{v}$ (fig. 34):

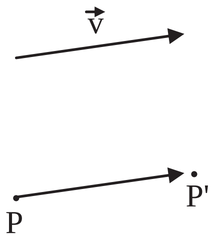


fig. 34

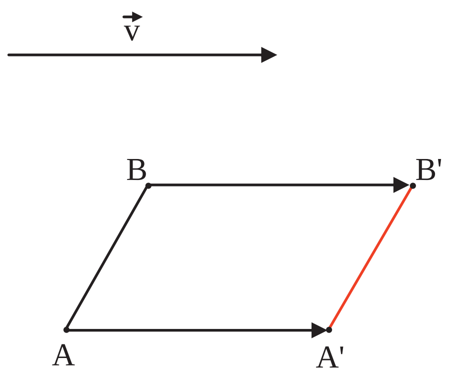
(*si conduce da* P *la semiretta di origine* P *parallela a* $\vec{v}$, *nel verso di* $\vec{v}$, *e si considera su di essa il punto* P' *tale che il segmento* PP' *abbia la stessa lunghezza di* $\vec{v}$).

- Il vettore $\vec{v}$ è detto *vettore traslazione*.
- Una traslazione è determinata quando è assegnato il vettore traslazione.
- Se il vettore $\vec{v}$ è il vettore nullo, la traslazione è la traslazione identica (o nulla) e viene indicata con I.
- Il punto P' si dice *traslato* del punto P nella traslazione di vettore $\vec{v}$ e si scrive:

$$\tau_{\vec{v}}: P \rightarrow P' \quad \text{o} \quad P' = \tau_{\vec{v}}(P)$$

Data una figura $\mathbb{F}$, determiniamo la figura $\mathbb{F}'$ traslata di $\mathbb{F}$ in una traslazione di vettore assegnato:

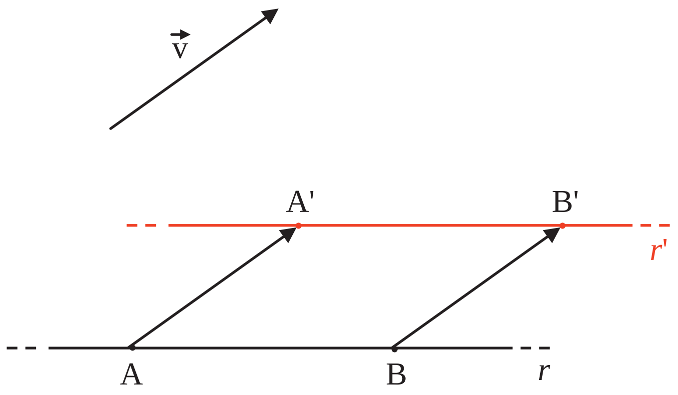
- <u>Costruzione del traslato di un segmento rispetto ad una traslazione di dato vettore $\vec{v}$ non nullo</u>.



Basta costruire i traslati A' e B' degli estremi A e B del segmento AB. Il segmento A'B' è il corrispondente di AB nella traslazione di vettore $\vec{v}$.
In simboli:

$\tau_{\vec{v}}$: AB $\rightarrow$ A'B'

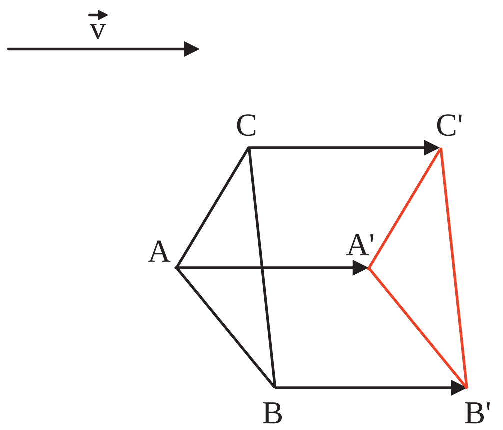
- Costruzione della traslata di una retta rispetto ad una traslazione di dato vettore $\vec{v}$ non nullo.



Si fissano due punti A e B su *r* e si determinano i punti A' e B' corrispondenti, rispettivamente, di A e di B nella traslazione di vettore $\vec{v}$.

La retta *r* passante per A' e B' è la retta cercata.

- Costruzione del traslato di un triangolo rispetto ad una traslazione di dato vettore $\vec{v}$ non nullo.



Basta determinare i punti A', B', C' corrispondenti, rispettivamente, dei vertici A, B, C nella traslazione di vettore $\vec{v}$. Il triangolo A'B'C' è il triangolo cercato.

OSSERVAZIONE:

Relativamente all'ultima costruzione, osserviamo che, nel triangolo ABC, i vertici A, B, C si susseguono in senso antiorario, così come avviene per i vertici A', B', C' , del triangolo A'B'C', traslato del triangolo ABC.

Si conclude che la traslazione conserva l'orientamento dei punti; cioè:

$\tau_{\vec{v}}$ è una *trasformazione diretta*.

TEOREMA

La traslazione è un'isometria.

Hp.: $\tau_{\vec{v}}$ traslazione

Th.: $\tau_{\vec{v}}$ isometria

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che $\tau_{\vec{v}}$ ha come invariante la lunghezza dei segmenti.

A tale scopo, (fig. 35), siano:

- A e B due punti;
- A' = $\tau_{\vec{v}}$(A) il trasformato di A nella $\tau_{\vec{v}}$;
- B' = $\tau_{\vec{v}}$(B) il trasformato di B nella $\tau_{\vec{v}}$.

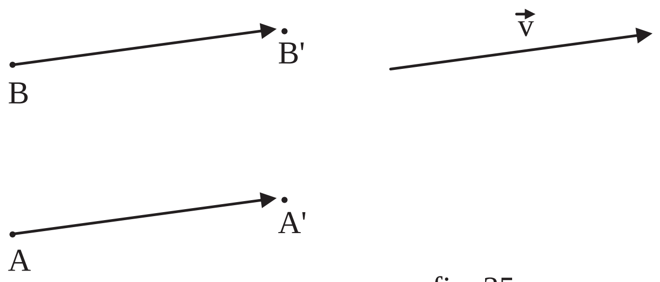


fig. 35

Dobbiamo, quindi, dimostrare che:

$AB \cong A'B'$.

Consideriamo, a tale scopo, i triangoli AA'B e BB'A' (fig. 36):

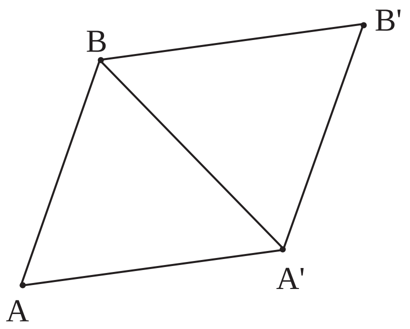


fig. 36

Essi hanno:

$AA' \cong BB'$ perché moduli di vettori equipollenti ("*segnare AA' e BB' con il simbolo* * ");

$A'B$ in comune (o $A'B \cong A'B$ per la proprietà riflessiva della congruenza);

$A\widehat{A'}B \cong A'\widehat{B}B'$ perché angoli interni rispetto alle parallele AA' e BB' tagliate dalla trasversale A'B ("*segnare* $A\widehat{A'}B$ *e* $A'\widehat{B}B'$ *con il simbolo* • ").

[Si ha, quindi, la seguente figura (fig. 37):

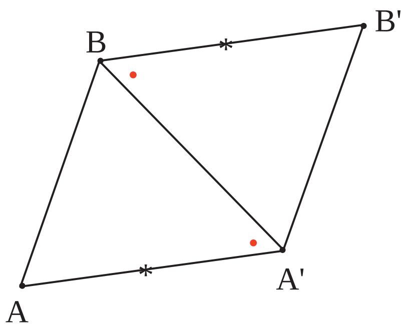


fig. 37]

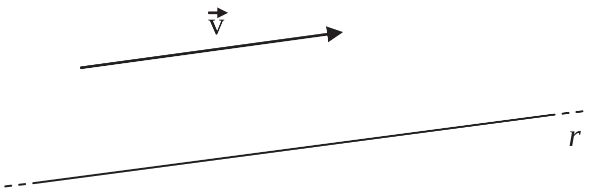
I due triangoli, avendo due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli altri elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$AB \cong A'B'$.

C.V.D.

TEOREMA

In una traslazione, le rette che hanno la stessa direzione del vettore traslazione sono rette unite (fig. 38).



Hp.: $\begin{cases} \tau_{\vec{v}} \text{ traslazione} \\ r \,//\, \vec{v} \end{cases}$

Th.: $\tau_{\vec{v}}:\ r \rightarrow r$

fig. 38

Dimostrazione

Consideriamo un generico punto $P \in r$ (fig. 39):

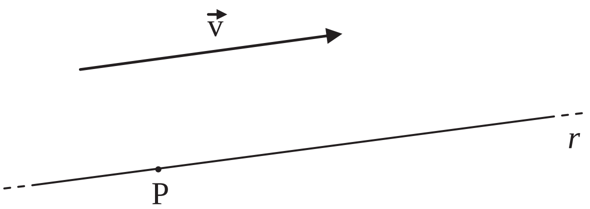


fig. 39

Per la definizione data di traslazione di vettore $\vec{v}$, si ha che:

$\tau_{\vec{v}}: P \rightarrow P'$ t.c. $\overrightarrow{PP'}$ equipollente a $\vec{v}$ (fig. 40):

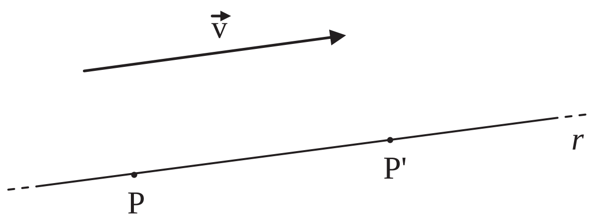


fig. 40

e quindi $P' \in r$.

Pertanto, data la generalità di P, si ha che, nella $\tau_{\vec{v}}$, ogni punto di r ha il traslato che appartiene ancora ad r e quindi r è retta unita.

C.V.D.

TEOREMA

In una traslazione, ad una retta *r*, che non ha la stessa direzione del vettore traslazione, corrisponde una retta *r'*, distinta da *r*, parallela ad *r* (fig. 41).

Hp.: $\begin{cases} \tau_{\vec{v}} \text{ traslazione} \\ \tau_{\vec{v}}: r \,//\, r' \end{cases}$

Th.: $r' \,//\, r$, $r' \neq r$

fig. 41

Dimostrazione

Prendiamo due punti P e Q su r e diciamo, rispettivamente, P' e Q' i loro traslati nella traslazione di vettore $\vec{v}$, cioè:

$P' = \tau_{\vec{v}}(P)$

$Q' = \tau_{\vec{v}}(Q)$ (fig. 42):

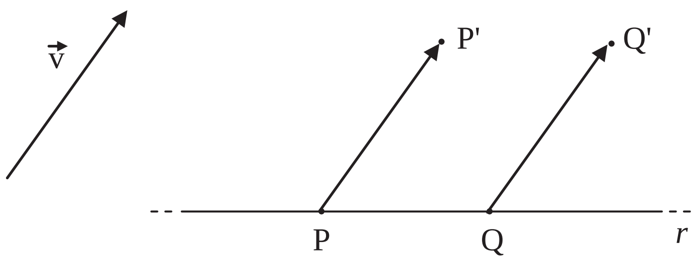


fig. 42

Congiungiamo il punto P' con Q e Q' (fig. 43):

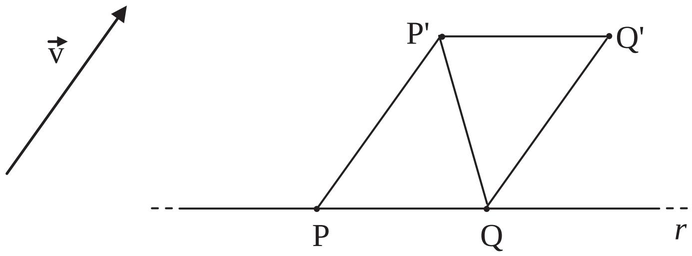


fig. 43

e consideriamo i triangoli PQP' e P' Q' Q; essi hanno:

$PP' \cong QQ'$	perché i segmenti orientati $\overrightarrow{PP'}$ e $\overrightarrow{QQ'}$ sono equipollenti;
P'Q in comune	(o $P'Q \cong P'Q$ per la proprietà riflessiva della congruenza);
$PQ \cong P'Q'$	perché segmenti che si corrispondono in una traslazione.

I due triangoli, avendo i tre lati ordinatamente congruenti, sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli altri elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$P\widehat{Q}P' \cong Q\widehat{P'}Q'$ (“*segnare* $P\widehat{Q}P'$ *e* $Q\widehat{P'}Q'$ *con il simbolo* • ”) [fig. 44]:

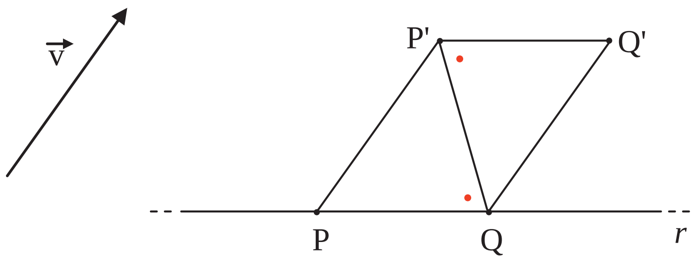
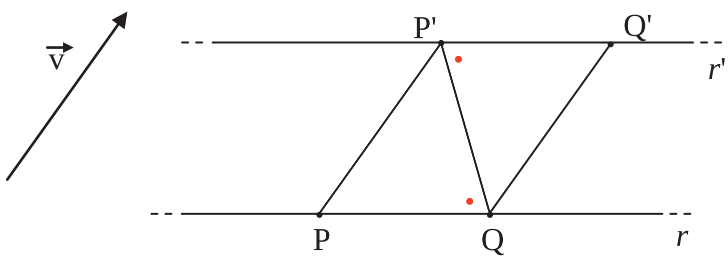


fig. 44

Di conseguenza, le rette PQ e P'Q' sono parallele perché, tagliate dalla trasversale P'Q, formano angoli alterni interni congruenti (fig. 45):



$r \,//\, r'$

fig. 45

C.V.D.

4.7 La rotazione

Fissati nel piano un punto O e un angolo α, su cui è fissato un verso di percorrenza (*angolo orientato*), la **rotazione** di centro O e angolo α, indicata con $\boldsymbol{\rho_{O,\alpha}}$, è quella trasformazione geometrica che ad ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che:

- $OP' \cong OP$;

- l'angolo $P\hat{O}P'$ è congruente ad α ed ugualmente orientato ad esso (fig. 46):

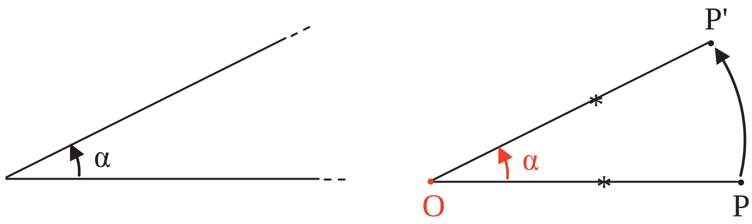


fig. 46

Si ha che:

- il punto **O** si dice **centro di rotazione**;
- l'angolo **α** si dice **angolo di rotazione** (o **ampiezza della rotazione**);
- con il simbolo $+\alpha$, o semplicemente α, indichiamo l'angolo orientato in senso, o verso, antiorario; con il simbolo $-\alpha$ quello orientato in senso, o verso, orario.
- una rotazione è determinata quando sono assegnati sia il centro O di rotazione sia l'angolo orientato α ;
- il punto P' (fig. 46) si dice *ruotato* del punto P nella rotazione di centro O ed angolo orientato α .

  In simboli:

  $$P' = \rho_{O,\alpha}(P)$$

  o anche:

  $$\rho_{O,\alpha} : P \;\rightarrow\; P'.$$

In generale, data una figura $\mathbb{F}$, per indicare che la figura $\mathbb{F}'$ è corrispondente di $\mathbb{F}$, nella rotazione di centro O e angolo α, si scrive:

$$\mathbb{F}' = \rho_{O,\alpha}(\mathbb{F})$$

o anche:

$$\rho_{O,\alpha} : \mathbb{F} \;\rightarrow\; \mathbb{F}' .$$

Osserviamo che:

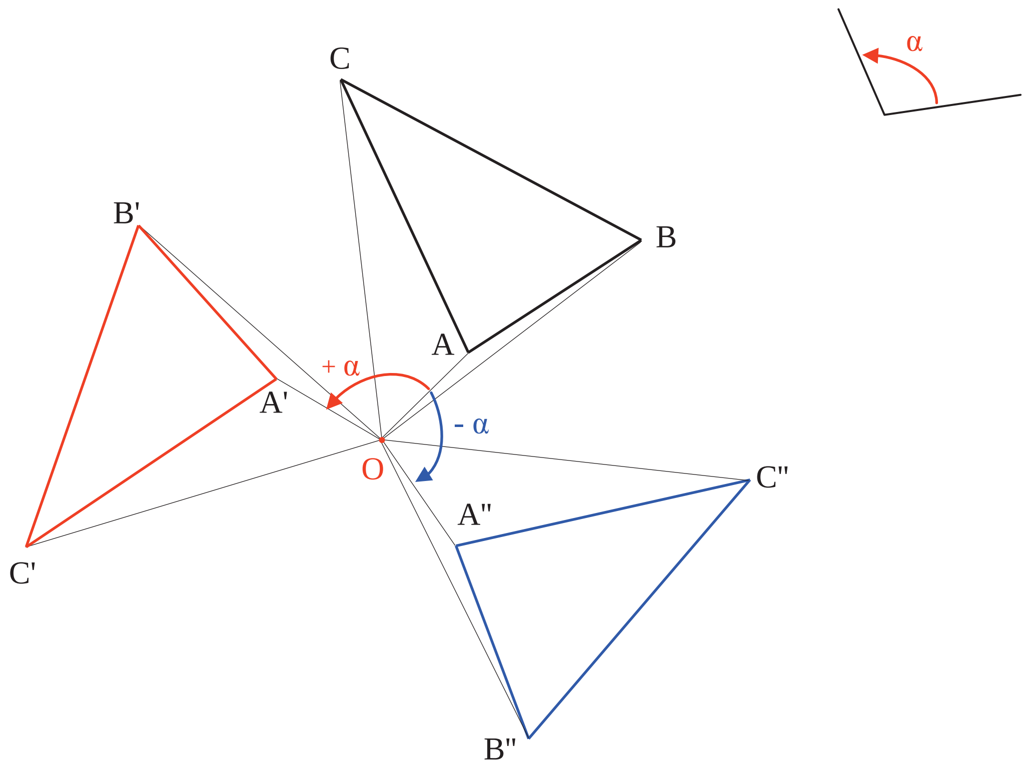
- per determinare l'immagine P' di un punto P, in una rotazione di centro O ed angolo orientato α, si costruisce l'angolo $P\hat{O}Q$, congruente ed ugualmente orientato ad α , e si prende il punto $P' \in OQ$, tale che $OP' \cong OP$;

- per determinare l'immagine di una retta, in una fissata rotazione, così come fatto per le altre trasformazioni geometriche, basta trovare le immagini di due suoi punti (**PROVA TU**);

- per determinare l'immagine di un poligono ABC… , in una fissata rotazione, basta trovare le immagini A' , B' , C' , ….. dei suoi vertici e, poi, congiungerle in tale ordine (**PROVA TU**).

Esercizio svolto

Dati il triangolo ABC, un punto O ed un angolo α, sottoponiamo il triangolo ad una rotazione di angolo + α ("verso antiorario") e ad una di angolo – α ("verso orario")



❖ Il triangolo A'B'C' è il trasformato del triangolo ABC nella rotazione di angolo + α.

❖ Il triangolo A"B"C" è il trasformato del triangolo ABC nella rotazione di angolo – α.

TEOREMA

La rotazione, $\rho_{O,\alpha}$, di centro O e angolo orientato α, è un'isometria.

Hp.: $\rho_{O,\alpha}$ rotazione

Th.: $\rho_{O,\alpha}$ isometria

Dimostrazione

Siano:

O il centro della rotazione;

α l'ampiezza della rotazione;

A e B due punti generici del piano;

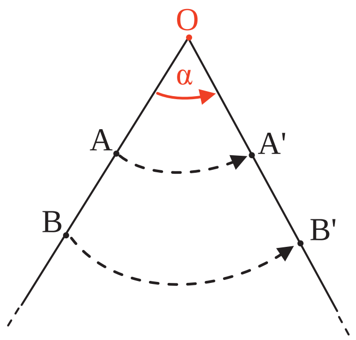
$A' = \rho_{O,\alpha}(A)$ il corrispondente di A nella $\rho_{O,\alpha}$;

$B' = \rho_{O,\alpha}(B)$ il corrispondente di B nella $\rho_{O,\alpha}$.

Dobbiamo, quindi, dimostrare che:

$AB \cong A'B'$.

- Esaminiamo prima il caso in cui O, A e B **siano** allineati (fig. 47):



$OA' \cong OA$

$OB' \cong OB$

fig. 47

In tal caso si ha::

$A'B' \cong OB' - OA' \cong OB - OA \cong AB$.

- Esaminiamo il caso in cui O, A e B **non siano** allineati (fig. 48):

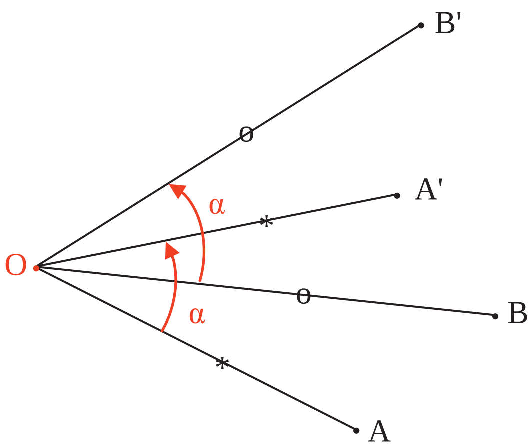


fig. 48

Consideriamo i triangoli OAB e OA'B' (fig. 49):

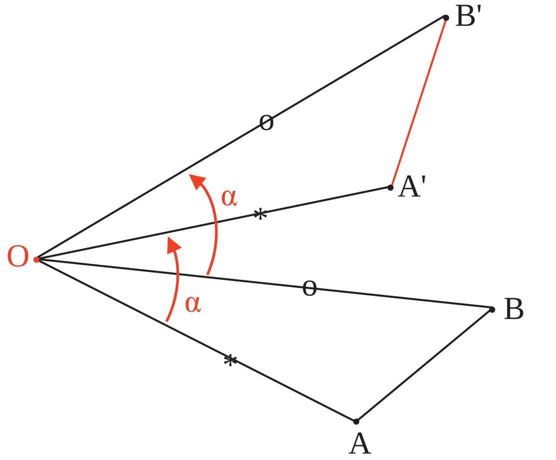


fig. 49

Essi hanno:

$OA \cong OA'$	perché A' è il corrispondente di A nella $\rho_{O,\alpha}$;
$OB \cong OB'$	perché B' è il corrispondente di B nella $\rho_{O,\alpha}$;
$A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B'$	perché differenze di angoli congruenti ($A\hat{O}A' \cong B\hat{O}B' \cong \alpha$; $A'\hat{O}B \cong A'\hat{O}B$).

I due triangoli, avendo due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$AB \cong A'B'$.

C.V.D.

In definitiva, la rotazione $\rho_{O,\alpha}$ associa, a due punti A e B, due punti A' e B' tali che AB $\cong$ A'B' e dunque la rotazione risulta un'isometria (diretta).

La rotazione gode, quindi, di tutte le proprietà delle isometrie ed in particolare trasforma una figura in un'altra ad essa congruente.

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

- il solo punto unito della trasformazione è il centro di rotazione;
- non esistono rette unite se non quelle che si corrispondono in una rotazione di ampiezza pari ad un angolo piatto o ad un suo multiplo e che passano per il centro di rotazione (in tal caso si ottiene la simmetria di centro O) [fig. 50]:

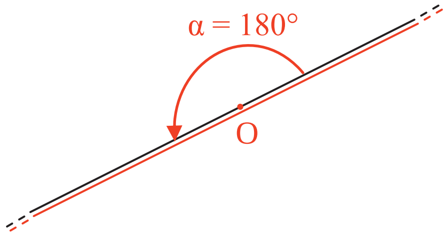


fig. 50

- la rotazione di angolo nullo, $\rho_{O,o}$, coincide con la trasformazione identica (fig. 51):

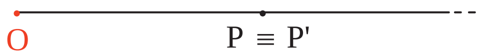


fig. 51

- la rotazione di ampiezza pari ad un angolo giro coincide con la trasformazione identica (fig. 52):

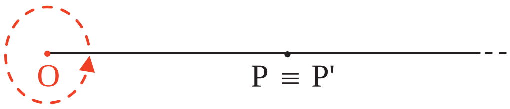


fig. 52

- la rotazione **conserva** l'orientamento dei punti (vedi fig. 41).

4.8 Composizione di trasformazioni

Possiamo pensare di *applicare* successivamente più trasformazioni geometriche, di eseguire, cioè, quello che viene chiamato un **prodotto di trasformazioni**.

Dimostriamo innanzitutto il seguente:

TEOREMA

Il prodotto di due (o più) isometrie è una isometria.

$$\text{Hp.:}\begin{cases} f_1 \text{ isometria} \\ f_2 \text{ isometria} \end{cases}$$

$$\text{Th.:}\quad f_2 \circ f_1 \text{ isometria}$$

Dimostrazione

Dobbiamo far vedere che $f_2 \circ f_1$ conserva la lunghezza dei segmenti.

Siano dati, quindi, due punti A e B del piano ed applichiamo ad essi l'isometria f_1; cioè:

f_1: A $\rightarrow$ A'

f_1: B $\rightarrow$ B'

con $AB \cong A'B'$ per definizione di isometria.

Applichiamo ora ai due punti A' e B' l'isometria f_2; cioè:

f_2 : A' $\rightarrow$ A"

f_2 : B' $\rightarrow$ B"

con $A'B' \cong A''B''$ per definizione di isometria.

Pertanto si ha:

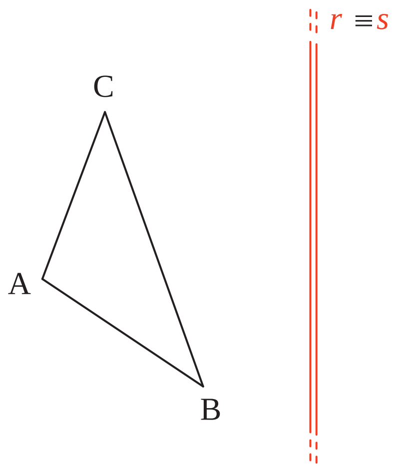
$AB \cong A''B''$ per la proprietà transitiva della congruenza

e quindi $f_2 \circ f_1$ è un'isometria.

C.V.D.

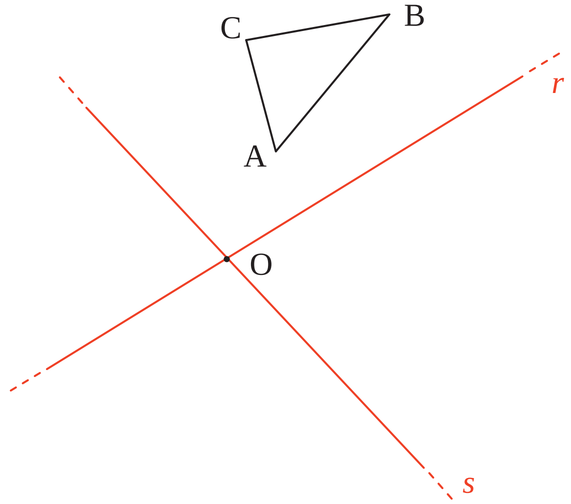
PROVA TU, ora, ad eseguire i seguenti "prodotti":

1. il prodotto di due simmetrie assiali con assi *r* ed *s* coincidenti:



Cosa deduci?

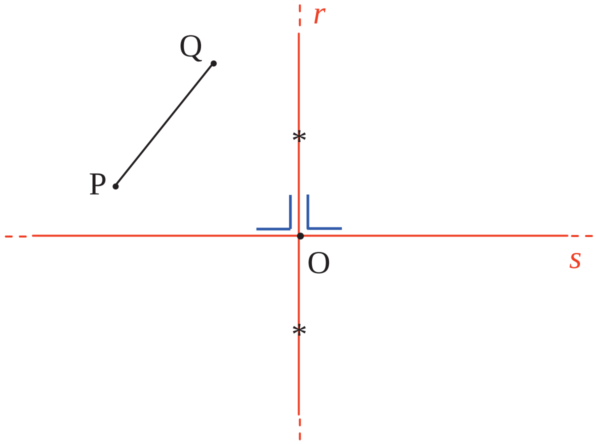
2. il prodotto di due simmetrie assiali con assi *r* ed *s* incidenti (*applica prima la simmetria di asse r e, successivamente, quella di asse s*):



COMPLETA:

Il prodotto di due simmetrie assiali con assi incidenti è una **rotazione** che ha centro nel ………………….. , angolo α orientato dal …………. asse al secondo asse ed ampiezza ………….. dell'angolo formato dai due assi.

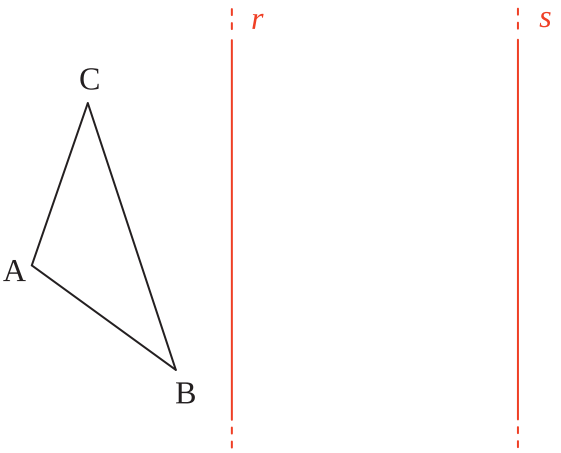
3. <u>il prodotto di due simmetrie assiali con assi *r* ed *s* tra loro perpendicolari</u> (*applica prima la simmetria di asse r e, successivamente, quella di asse s*):



Cosa succede se applichi prima la simmetria di asse *s* e, successivamente, quella di asse *r* ?

VERIFICA, quanto da te dedotto, considerando, al posto del segmento PQ, un triangolo ABC. Sottoponi, poi, le "tue" figure, *il segmento PQ e il triangolo ABC,* alla simmetria con centro nel punto O d'intersezione dei due assi. Cosa deduci?

4. <u>il prodotto di due simmetrie assiali con assi *r* ed *s* tra loro parallele</u> (*applica prima la simmetria di asse r e, successivamente, quella di asse s*):



Pensi che tale prodotto "sia legato" alla traslazione? In caso di risposta affermativa, cosa puoi concludere?

Come esercizio, rappresenta i seguenti casi di prodotti di trasformazioni, cui sottoponi una figura $\mathbb{F}$ a tua scelta:

- il prodotto di due simmetrie centrali con centri distinti O e O_1, eseguite nell'ordine **[**è una traslazione secondo un vettore che ha come modulo il doppio della distanza fra i due centri, come direzione quella di OO_1 e come verso quello da O ad O_1**]**.

  VERIFICA che tale prodotto non è commutativo.

- il prodotto di due traslazioni **[**è una traslazione che ha come vettore il vettore somma dei vettori delle due traslazioni date**]**.

  VERIFICA che tale prodotto è commutativo.

- il prodotto di due rotazioni con lo stesso centro **[**è una rotazione che ha centro nello stesso punto ed ampiezza uguale alla somma delle ampiezze delle due rotazioni date**]**.

- il prodotto di due rotazioni con centri diversi:

  [❖ è una traslazione, se gli angoli delle due rotazioni sono opposti;

  ❖ è una rotazione, avente per centro un punto, in genere distinto dai due centri, e ampiezza uguale alla somma algebrica delle ampiezze delle due rotazioni, se gli angoli delle due rotazioni non sono opposti**]**.

- il prodotto di una rotazione con una traslazione (**rototraslazione**).

  VERIFICA, con un esempio, che, se $\rho_{O,\alpha}$ è la rotazione e $\tau_{\vec{v}}$ la traslazione, si ha:

  $$\rho_{O,\alpha} \circ \tau_{\vec{v}} \neq \tau_{\vec{v}} \circ \rho_{O,\alpha} \quad ,$$

  cioè le due isometrie non sono permutabili.

- il prodotto di una simmetria assiale con una traslazione parallela all'asse di simmetria (**antitraslazione**).

  VERIFICA, con un esempio, che, se σ_r è la simmetria assiale e $\tau_{\vec{v}}$ la traslazione, con $\vec{v}$ // *r*, si ha:

  $$\tau_{\vec{v}} \circ \sigma_r = \tau_{\vec{v}} \circ \sigma_r \, ,$$

  cioè le due isometrie sono permutabili.

4.9 Gruppi di trasformazioni

Se consideriamo l'insieme delle traslazioni $\mathcal{T}$ del piano e "componiamo" due traslazioni (**prodotto di traslazioni**), $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ e $\tau_{\overrightarrow{BC}}$, otteniamo la traslazione $\tau_{\overrightarrow{AC}}$ che ha come vettore il vettore somma dei vettori delle due traslazioni date; cioè:

$\tau_{\overrightarrow{BC}} \circ \tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\overrightarrow{AC}}$ (*simbolismo analogo a quello utilizzato per le funzioni*).

Questo significa che:

- L'insieme $\mathcal{T}$ delle traslazioni è **chiuso** rispetto all'operazione di composizione, cioè la composizione di traslazioni è un'operazione interna a $\mathcal{T}$.

Inoltre l'operazione di composizione gode in $\mathcal{T}$ delle seguenti proprietà (**PROVA TU**):

- è associativa.
  In simboli:
  $\tau_{\overrightarrow{AB}} \circ (\tau_{\overrightarrow{BC}} \circ \tau_{\overrightarrow{CD}}) = (\tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \tau_{\overrightarrow{BC}}) \circ \tau_{\overrightarrow{CD}}$

- ammette elemento neutro.
  In simboli:
  $\tau_{\overrightarrow{PQ}} \circ \mathrm{I} = \tau_{\overrightarrow{PQ}} = \mathrm{I} \circ \tau_{\overrightarrow{PQ}}$

- ogni elemento di $\mathcal{T}$ ammette l'inverso, cioè per ogni traslazione esiste la traslazione inversa.
  In simboli:
  $\tau_{\overrightarrow{PQ}} \circ \tau_{\overrightarrow{QP}} = \mathrm{I} = \tau_{\overrightarrow{QP}} \circ \tau_{\overrightarrow{PQ}}$

Pertanto l'insieme delle traslazioni, rispetto all'operazione di composizione, ha la struttura di gruppo; cioè:

($\mathcal{T}$, $\circ$) è un gruppo.

Inoltre:

- l'operazione di composizione è commutativa.
  In simboli:
  $\tau_{\overrightarrow{BC}} \circ \tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \tau_{\overrightarrow{BC}}$
  per cui:
  ($\mathcal{T}$, $\circ$) è un gruppo commutativo.

PROVA TU che l'insieme delle rotazioni rispetto ad uno stesso centro è un gruppo commutativo.
Cosa puoi dire per l'operazione di composizione di rotazioni con centri diversi?
E per quella di composizione di simmetrie assiali?

COMPLETA:
L'insieme delle isometrie ……………. , rispetto all'operazione di composizione, ha una struttura di …………………... .
Ciò non accade per l'insieme delle isometrie ……………... che non è chiuso rispetto all'operazione di ………………………… .

4.10 Conclusioni
L'esame dei vari casi affrontati permette di concludere che ogni isometria può essere pensata come composizione di simmetrie assiali.
Precisamente:

- una simmetria centrale può essere pensata come composizione di due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari;
- una traslazione può essere pensata come composizione di due simmetrie assiali con gli assi paralleli;
- una rotazione può essere pensata come composizione di due simmetrie assiali con gli assi incidenti.

Inoltre:

- ❖ la composizione di due isometrie dirette è una isometria diretta;
- ❖ la composizione di due isometrie inverse è una isometria diretta;
- ❖ la composizione di due isometrie, una diretta e una inversa, è un'isometria inversa.

Pensando alla seguente corrispondenza:

simmetria diretta $\longrightarrow$ +

simmetria inversa $\longrightarrow$ –

ritroviamo le "nostre" composizioni nella tabella moltiplicativa tra numeri relativi:

•	+	–
+	+	–
–	–	+

Si può dimostrare che le isometrie si ottengono **solo** mediante la composizione di simmetrie assiali per cui **non esistono** isometrie diverse da quelle studiate nella presente unità.