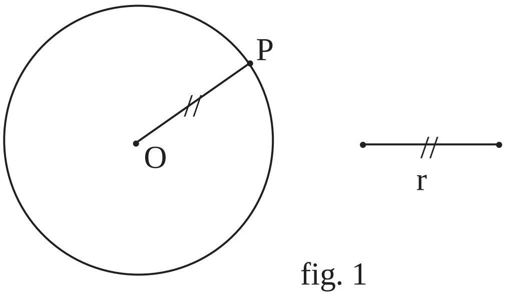
UNITÀ 6

LA CIRCONFERENZA E IL CERCHIO

6.1 Generalità

Fissati nel piano un punto O ed un segmento r , si chiama **circonferenza** di centro O e raggio r il luogo geometrico dei punti P del piano aventi distanza da O congruente al segmento r (fig. 1):

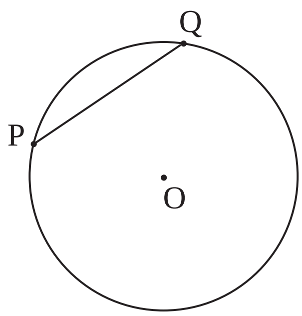


PO = distanza di P da O = d (P, O)

$PO \cong r$

fig. 1

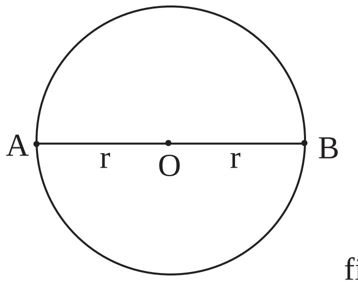
Ovviamente ogni segmento avente per estremi il punto O ed un punto qualsiasi della circonferenza è congruente al segmento r (e quindi *tutti i raggi sono congruenti*).
Si chiama **corda** il segmento che ha per estremi due punti qualsiasi della circonferenza (fig. 2):



PQ corda

fig. 2

Si chiama **diametro** ogni segmento che ha per estremi due punti della circonferenza e che contiene il centro della circonferenza stessa (fig. 3):



AB diametro

$AB \cong 2\,r$

fig. 3

Il diametro è, quindi, una corda che contiene il centro della circonferenza. Gli estremi A e B del diametro si dicono *punti diametralmente opposti*. La retta passante per A e B viene detta *retta diametrale*.

Dato che il diametro è congruente al doppio del raggio, *tutti i diametri di una stessa circonferenza sono congruenti*.

Le circonferenze si disegnano con il compasso: la punta metallica nel *centro* O ed apertura “uguale” al *raggio*.

DISEGNA sul tuo quaderno tre circonferenze con centri in tre punti A, B, C a tua scelta e raggi rispettivamente $r = 3$ cm, $r = 5$ cm, $r = 6$ cm.

La circonferenza è una **linea chiusa non intrecciata** e divide il piano in tre sottoinsiemi disgiunti:

- l’insieme dei punti la cui distanza dal centro è minore del raggio (*punti* ***interni*** *alla circonferenza*);
- l’insieme dei punti la cui distanza dal centro è congruente al raggio (*punti* ***della*** *circonferenza*);
- l’insieme dei punti la cui distanza dal centro è maggiore del raggio (*punti* ***esterni*** *alla circonferenza*).

In fig. 4 è data una circonferenza Γ e sono rappresentati un punto interno, un punto esterno e un punto appartenente a Γ:

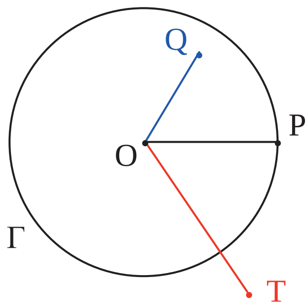


fig. 4

Q punto *interno* a Γ : $OQ < r$

P punto *appartenente* a Γ : $OP \cong r$

T punto *esterno* a Γ : $OT > r$

Si dice **cerchio** di centro O e raggio r il luogo dei punti P del piano che hanno distanza da O minore o congruente al raggio; in simboli:

$$\{P \in \pi \ / \ PO < r \ \vee \ PO \cong r\}.$$

Pertanto, il cerchio è la figura formata dall’insieme dei punti interni e dei punti appartenenti alla circonferenza (fig. 5):

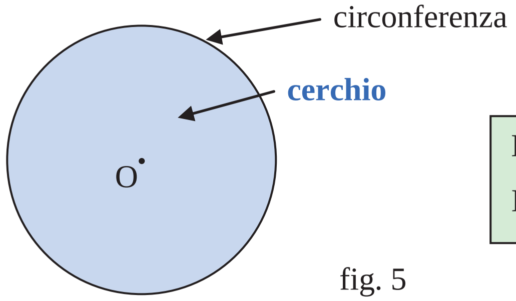


fig. 5

> La circonferenza è il *contorno* del cerchio.
> Il punto O è il *centro* della circonferenza e del cerchio.

Il cerchio è una figura convessa [**PERCHÉ?**]

È intuitivo che due circonferenze/cerchi sono congruenti se e solo se hanno raggi congruenti.

6.2 Simmetrie nella circonferenza (e nel cerchio)

La circonferenza e il cerchio hanno **infiniti assi di simmetria** e **un centro di simmetria**.

Valgono infatti i seguenti teoremi:

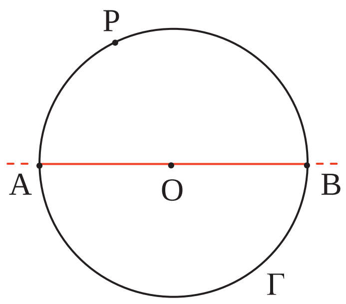
TEOREMA

Ogni retta che contiene un diametro è asse di simmetria per la circonferenza / il cerchio.

Sia data una circonferenza Γ di centro O e raggio r. Consideriamo un diametro AB e la simmetria assiale σ_{AB} di asse la retta AB.

Vogliamo dimostrare che, considerato un generico punto P di Γ, il suo corrispondente P', nella σ_{AB}, appartiene ancora a Γ.

Quindi:



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ A, B, P \in \Gamma \;;\quad O \in AB \\ \sigma_{AB} : P \to P' \end{cases}$

Th.: $P' \in \Gamma$

Dimostrazione

Nella σ_{AB} si ha:

$\sigma_{AB} : O \to O$ perché O è un punto dell'asse di simmetria

e, poiché per ipotesi:

$\sigma_{AB} : P \to P'$,

si ha:

$\sigma_{AB} : OP \to OP'$.

Dato che la simmetria assiale è una isometria, si ha:

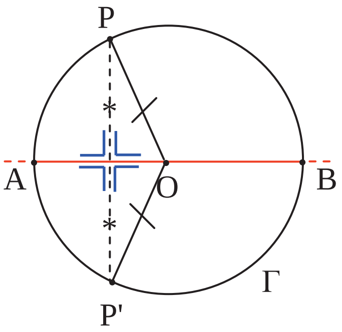
$OP \cong OP'$

e, poiché $OP \cong r$, segue che:

$OP' \cong r$ per la proprietà transitiva della congruenza,

cioè $P' \in \Gamma$.

[La figura seguente "sintetizza" il precedente teorema:



]

C.V.D.

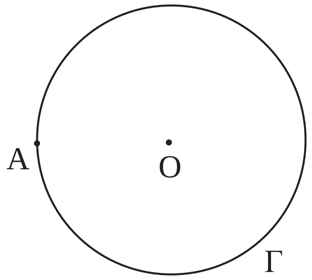
Dal precedente teorema segue che la circonferenza e il cerchio hanno infiniti assi di simmetria che sono le infinite rette passanti per il centro (*rette del fascio di centro O*), cioè le infinite rette che "contengono" gli infiniti diametri.

TEOREMA

Il centro della circonferenza è centro di simmetria per la circonferenza / il cerchio.

Data la circonferenza Γ di centro O e raggio r, consideriamo la simmetria centrale di centro O, σ_O. Vogliamo dimostrare che, considerato un generico punto A di Γ, il suo corrispondente nella σ_O appartiene ancora a Γ.

Quindi:



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ A \in \Gamma \\ \sigma_O : A \to A' \end{cases}$

Th.: $A' \in \Gamma$

Dimostrazione

Sappiamo per ipotesi che $A \in \Gamma$ e che

$\sigma_O : A \to A'$,

quindi, per definizione di simmetria centrale, è:

$OA \cong OA'$

e, poiché $OA \cong r$, si ha che:

$OA' \cong r$ per la proprietà transitiva della congruenza,

cioè $A' \in \Gamma$ (fig. 6):

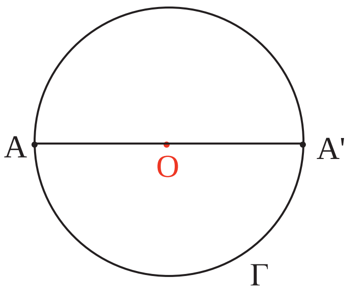


fig. 6

C.V.D.

PROVA TU:

La circonferenza e il cerchio sono figure **unite** in ogni rotazione di centro O.

6.3 Le parti della circonferenza e del cerchio

Si dice **arco** ciascuna delle due parti in cui una circonferenza viene divisa da due suoi punti (fig. 7):

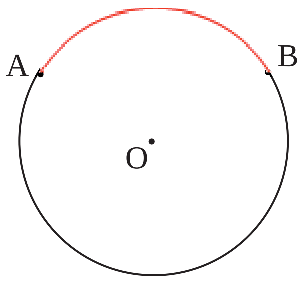


fig. 7

I punti A e B individuano due archi che si indicano con $\overset{\frown}{AB}$.
Spesso, per evitare confusione, si fissa un punto interno ad uno dei due archi che si vuole individuare (fig. 8):

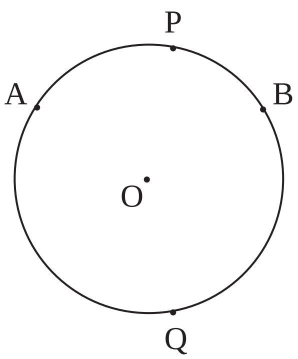


fig. 8

Si hanno così gli archi $\overset{\frown}{APB}$ e $\overset{\frown}{AQB}$; oppure, volendo riferirsi, per esempio, all'arco $\overset{\frown}{APB}$, si dice l'arco $\overset{\frown}{AB}$ che contiene P o, ancora, l'arco $\overset{\frown}{AB}$ che non contiene Q.
Alcuni parlano di "arco minore" / "arco maggiore", ….. con qualche problema, però, nel caso in cui gli estremi dell'arco siano punti diametralmente opposti.

Ad ognuno dei due archi individuati da due punti A e B della circonferenza "corrisponde" una sola corda AB (*corda sottesa dall'arco*) ma ad ogni corda "corrispondono" due archi $\overset{\frown}{AB}$ (*archi sottesi dalla corda*) [fig. 9]:

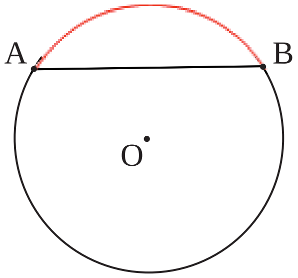


fig. 9

- La corda AB è sottesa da ciascuno dei due archi AB.
- I due archi AB sono sottesi dalla corda AB.

Quando i due punti A e B sono diametralmente opposti, ognuno dei due archi viene chiamato **semicirconferenza** (fig. 10):

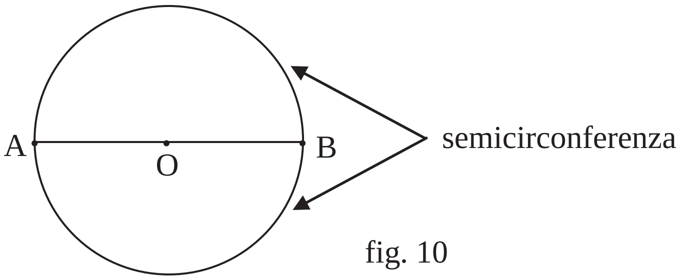


fig. 10

Ogni corda divide il cerchio in due parti, ciascuna delle quali si chiama **segmento circolare ad una base**.

In fig. 11, la corda AB delimita due segmenti circolari di **base** AB:

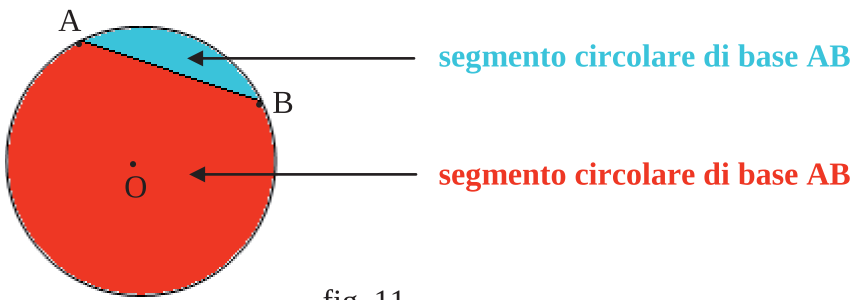


fig. 11

OSSERVAZIONE:

Il segmento circolare a una base si può pensare ottenuto dall'intersezione di un semipiano, la cui origine contiene una corda, con un cerchio (fig. 12):

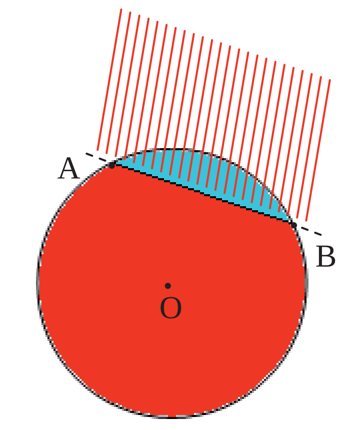


fig. 12

Si dice **altezza** di un segmento circolare ad una base il segmento che ha come estremi il punto medio della base e il punto d'intersezione dell'asse della base con la circonferenza (*meglio, con l'arco del nostro segmento circolare*).

In fig. 13 abbiamo individuato un segmento circolare di base AB e altezza MH:

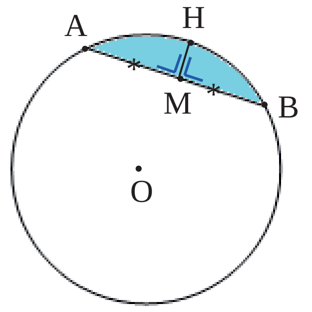


fig. 13

Se la corda è un diametro (fig. 14), ognuno dei due segmenti circolari viene chiamato **semicerchio**:

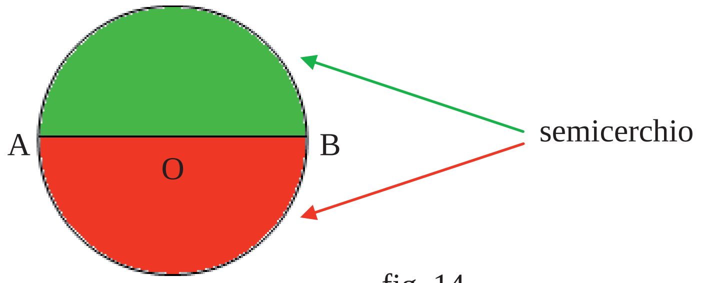


fig. 14

Il semicerchio è ciascuna delle due parti di piano comprese fra una circonferenza ed un suo diametro.

Se consideriamo due corde parallele AB e CD, la parte di cerchio compresa tra le due corde si chiama **segmento circolare a due basi** (*AB e CD basi*) [fig. 15]:

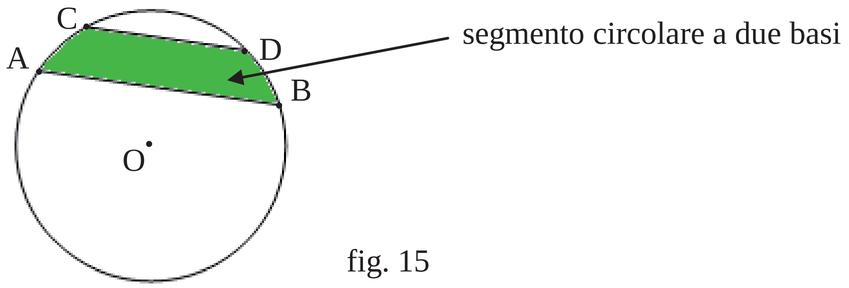


fig. 15

OSSERVAZIONE:

Il segmento circolare a due basi si può pensare ottenuto dall'intersezione di una striscia, individuata da due corde parallele (*basi del segmento circolare*) con un cerchio (fig. 16):

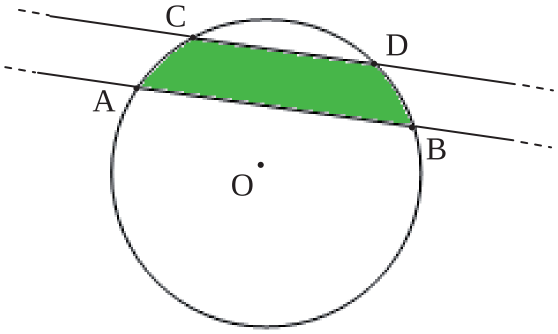
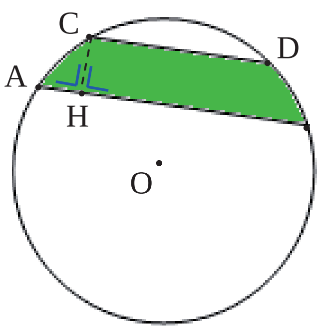


fig. 16

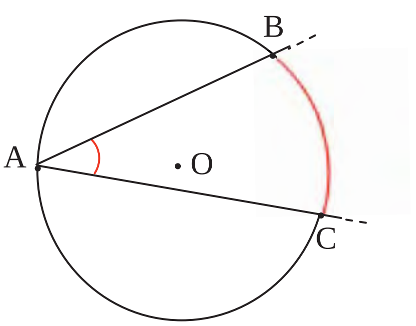
Si chiama **altezza** di un segmento circolare a due basi la distanza tra le due basi (fig. 17):



CH altezza del segmento circolare di basi AB e CD.

fig. 17

Si dice **angolo alla circonferenza** un angolo convesso avente per vertice un punto della circonferenza e i lati entrambi secanti la circonferenza (fig. 18), oppure uno secante e l'altro tangente (fig. 19):



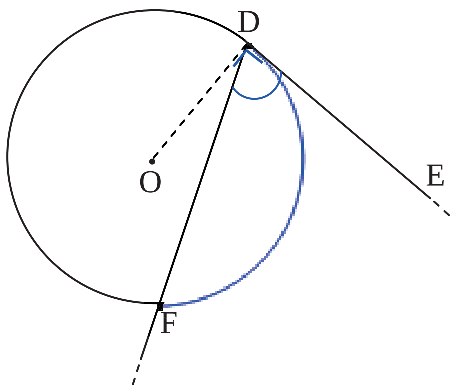
$B\widehat{A}C$ angolo alla circonferenza.

I lati AB e AC sono entrambi **secanti** la circonferenza.

fig. 18

L'angolo alla circonferenza individua l'arco $\overset{\frown}{BC}$ di colore rosso: si dice che l'angolo alla circonferenza $B\widehat{A}C$ **insiste** sull'arco $\overset{\frown}{BC}$;

oppure:



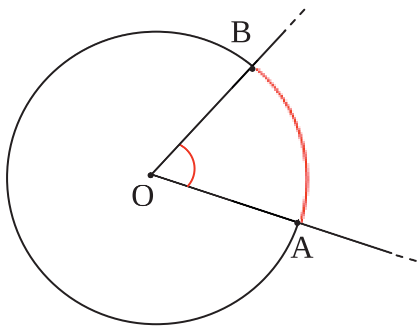
$E\hat{D}F$ angolo alla circonferenza.

Il lato DF è **secante**, il lato DE è **tangente** alla circonferenza.

fig. 19

L’angolo alla circonferenza individua l’arco $\overset{\frown}{DF}$ di colore blu: si dice che l’angolo alla circonferenza $E\hat{D}F$ **insiste** sull’arco $\overset{\frown}{DF}$.

Si dice **angolo al centro** un angolo che ha il vertice nel centro di una circonferenza (fig. 20):



$A\hat{O}B$ angolo convesso

fig. 20

In fig. 20, i lati dell’angolo al centro intersecano la circonferenza in due punti A e B, individuando, così, l’arco $\overset{\frown}{AB}$ di circonferenza, (*e la corda AB*), interno all’angolo: si dice che l’angolo al centro $A\hat{O}B$ **insiste** sull’arco $\overset{\frown}{AB}$ o **sottende** l’arco $\overset{\frown}{AB}$.

In fig. 21, l’angolo convesso $A\hat{O}B$ insiste sull’arco $\overset{\frown}{AB}$ di colore rosso mentre l’angolo concavo $A\hat{O}B$ insiste sull’arco $\overset{\frown}{AB}$ di colore blu.

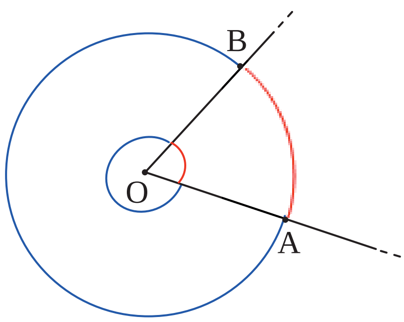


fig. 21

OSSERVAZIONE:

Ad ogni angolo alla circonferenza “corrisponde” uno ed un solo angolo al centro che insiste sullo stesso arco (fig. 22):

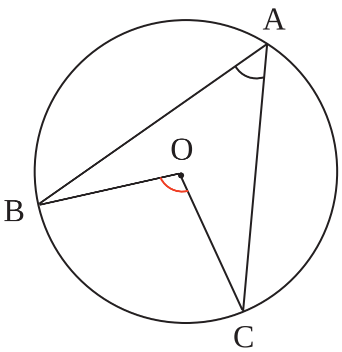


fig. 22

$B\widehat{A}C$ angolo alla circonferenza che insiste sull’arco $\overset{\frown}{BC}$.

All’angolo $B\widehat{A}C$ $\rightarrow$ uno ed un solo angolo al centro, l’angolo $B\widehat{O}C$, che insiste sullo stesso arco $\overset{\frown}{BC}$.

La “corrispondenza” evidenziata **non è** però biunivoca; infatti ad un angolo al centro che insiste su un certo arco, corrispondono infiniti angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (fig. 23):

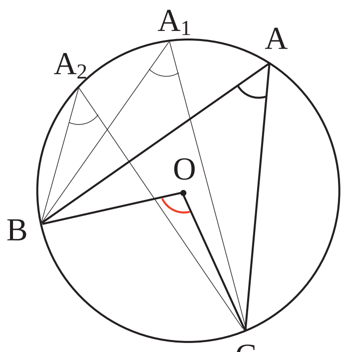


fig. 23

$B\widehat{O}C$ angolo al centro che insiste sull’arco $\overset{\frown}{BC}$.

All’angolo $B\widehat{O}C$ $\rightarrow$

- $B\widehat{A}C$ angolo alla circonferenza che insiste sull’arco $\overset{\frown}{BC}$;
- $B\widehat{A_1}C$ angolo alla circonferenza che insiste sull’arco $\overset{\frown}{BC}$;
- $B\widehat{A_2}C$ angolo alla circonferenza che insiste sull’arco $\overset{\frown}{BC}$;
- ………………......

<u>PROVA TU</u> il seguente

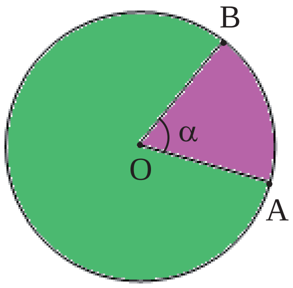
TEOREMA

In ogni circonferenza <u>se</u> si verifica una delle seguenti congruenze:

- **due corde sono congruenti;**
- **due archi sono congruenti;**
- **due angoli al centro sono congruenti,**

<u>allora</u> si verificano anche le restanti congruenze.

Si dice **settore circolare** ciascuna delle due parti di cerchio limitate da due raggi (fig. 24):



Ciascuna delle due parti colorate è un settore circolare;

α ampiezza del settore di colore fucsia.

fig. 24

OSSERVAZIONE:

Il settore circolare si può pensare ottenuto dall'intersezione di un angolo al centro con il cerchio (fig. 25):

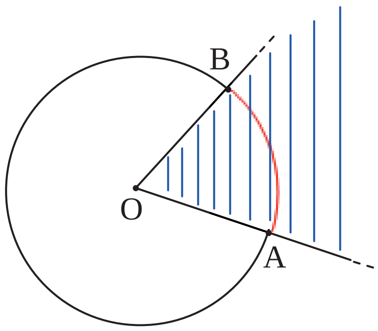
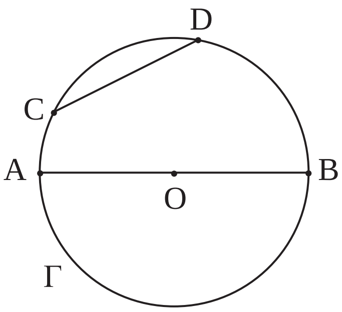


fig. 25

6.4 Proprietà delle corde di una circonferenza

TEOREMA

In una circonferenza, ogni diametro è maggiore di qualsiasi corda non passante per il centro.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro } O \\ AB \text{ diametro} \\ CD \text{ corda },\ O \notin CD \end{cases}$

Th.: $AB > CD$

Dimostrazione

Congiungiamo gli estremi C e D della corda con il centro O della nostra circonferenza ottenendo, così, il triangolo COD (fig. 26):

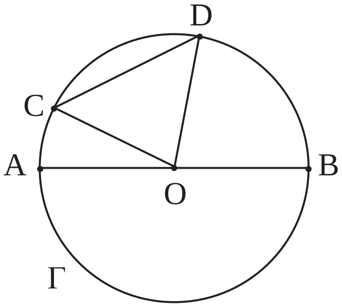


fig. 26

Poiché in un triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo lato, si ha:

$$OC + OD > CD$$

ed essendo OC e OD raggi, risulta:

$$OC + OD \cong AB$$

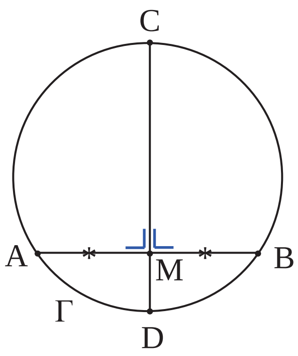
e quindi:

$$AB > CD$$

C.V.D.

TEOREMA

In una circonferenza, l'asse di una corda passa per il centro della circonferenza stessa.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro } O \\ AB \text{ corda} \\ CD \text{ asse di } AB \end{cases}$

Th.: CD diametro

Dimostrazione

Sappiamo che CD è l'asse della corda AB, cioè la perpendicolare ad AB passante per il suo punto medio M.

Per dimostrare che CD è un diametro, basta far vedere che vi appartiene il centro O.

Ora, il centro della circonferenza è, per definizione, equidistante da tutti i punti della circonferenza e, quindi, anche dagli estremi A e B della corda (fig. 27):

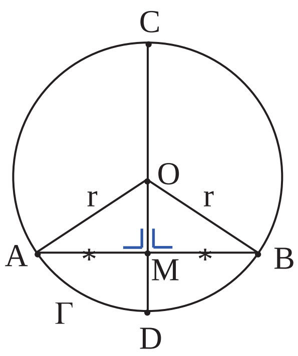


fig. 27

Pertanto il centro O appartiene all'asse di AB [ricorda che "*l'asse di un segmento è il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento*"].

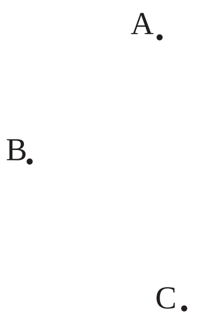
C.V.D.

CIRCONFERENZA PER TRE PUNTI

Come conseguenza del precedente teorema si ha il seguente:

TEOREMA

Per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza.



Hp.: A, B, C punti non allineati

Th.: ∃| circonferenza passante per A, B, C

Dimostrazione

Conduciamo gli assi dei segmenti AB e BC ed indichiamo con O il loro punto d'intersezione (esiste! **PERCHÉ?**) [fig. 28]:

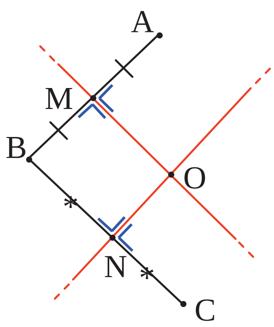


fig. 28

Si ha:

$OA \cong OB$	perché O appartiene all'asse di AB;
$OB \cong OC$	perché O appartiene all'asse di BC,

da cui segue:

$OA \cong OB \cong OC$	per la proprietà transitiva della congruenza.

Pertanto O è equidistante dai punti A, B, C e, quindi, è il centro della circonferenza passante per tali punti (fig. 29):

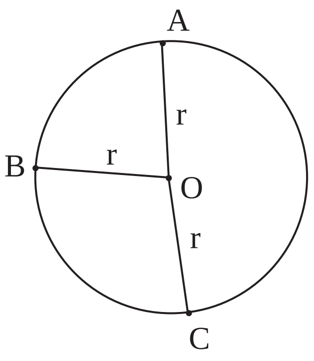


fig. 29

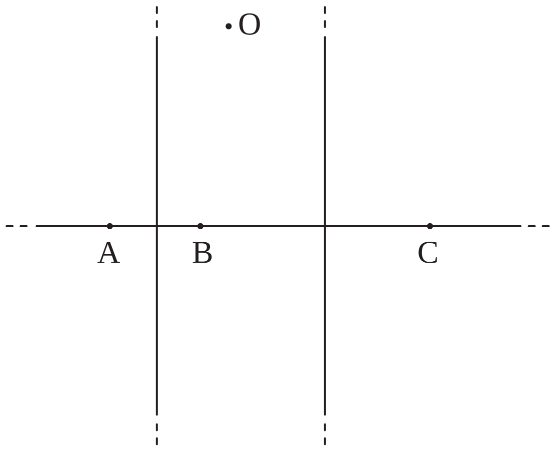
La circonferenza è **unica** perché è unico il punto d'intersezione dei due assi e, di conseguenza, è **unico** il punto equidistante dai punti dati.

C.V.D.

OSSERVAZIONE:
Per la dimostrazione del teorema si possono condurre *due qualsiasi* tra i tre assi dei tre segmenti AB, BC, AC.

COROLLARIO 1
Due circonferenze distinte non possono avere più di due punti di intersezione.
[Infatti se ne avessero tre, sarebbero la stessa circonferenza].

COROLLARIO 2
Una circonferenza non può avere tre punti allineati.
[Se una circonferenza avesse, infatti, tre punti allineati:



A, B, C allineati

gli assi delle corde AB e BC dovrebbero essere incidenti in O, per cui ……………………………….... CONTINUA
……………………………………………………………………].

Ora *giochiamo* ….. con un po' di circonferenze e "verifichiamo" con il disegno che:

- **per un punto** del piano passano **infinite** circonferenze.

Dato, infatti, nel piano un punto P, osserviamo che ognuno degli **infiniti** punti O_1, O_2, O_3, ….. , distinti da P, può essere considerato come centro di una circonferenza Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , ….., di raggio rispettivamente O_1P , O_2P , O_3P , ….. (fig. 30):

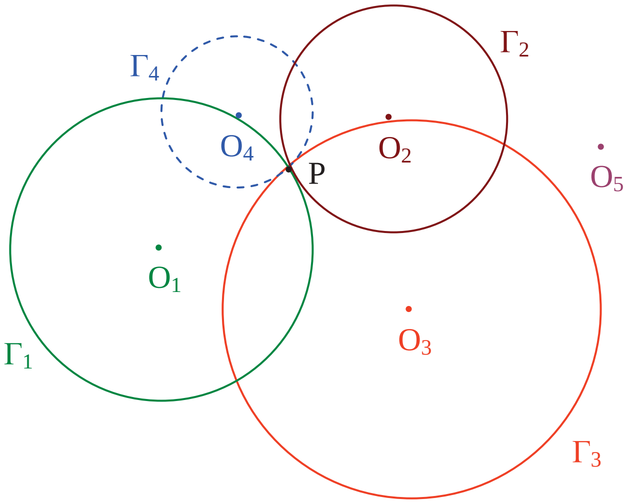


fig. 30

- **per due punti** del piano passano **infinite** circonferenze.

Dati, infatti, nel piano due punti P e Q, conduciamo l'asse del segmento PQ ed osserviamo che ognuno degli **infiniti** punti O_1, O_2, O_3, … dell'asse può essere considerato come centro di una circonferenza Γ_1, Γ_2 , Γ_3 , ., di raggio rispettivamente O_1P (o O_1Q) , O_2P (o O_2Q) , O_3P (o O_3Q) , ….. (fig. 31):

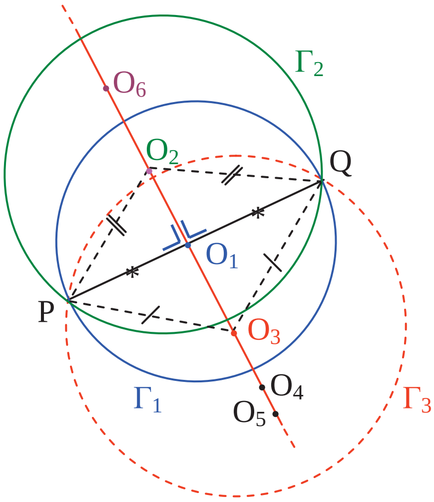


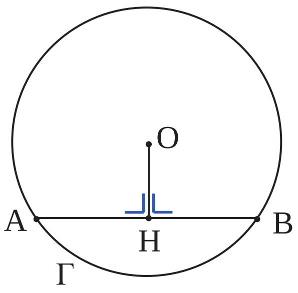
fig. 31

- **per tre punti** del piano, non allineati, passa **una ed una sola** circonferenza.

Dati, infatti, nel piano tre punti L, M, N, non allineati ……………………CONTINUA……………… (costruzione riportata in fig. 28, pag. 13).

TEOREMA

La perpendicolare condotta dal centro della circonferenza ad una sua corda dimezza la corda.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ \text{AB corda} \\ \text{OH} \perp \text{AB} \end{cases}$

Th.: $AH \cong HB$

Dimostrazione

Congiungiamo il centro O con gli estremi A e B della corda (fig. 32):

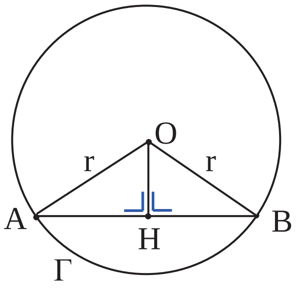


fig. 32

e consideriamo i triangoli OAH e OBH; essi hanno:

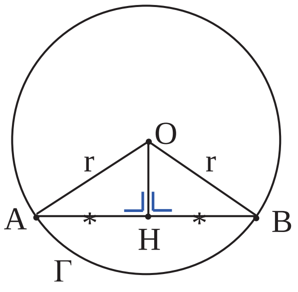
$O\widehat{H}A \cong O\widehat{H}B$		retti, per ipotesi;
$OA \cong OB$		perché raggi;
OH	in comune	(o $OH \cong OH$ per la proprietà riflessiva della congruenza).

I due triangoli, avendo ordinatamente congruenti l'angolo retto, l'ipotenusa ed un cateto, sono congruenti per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. Avranno, pertanto, tutti gli altri elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$AH \cong HB$ (“*segnare AH e HB con il simbolo* $*$ ”).

C.V.D.

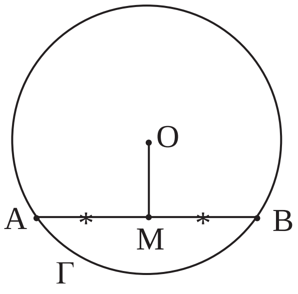
[Al termine della teorema la figura si presenta come segue:



]

TEOREMA INVERSO

La congiungente il centro O di una circonferenza con il punto medio M di una sua corda è perpendicolare alla corda.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ \text{AB corda} \\ \text{AM} \cong \text{MB} \end{cases}$

Th.: $\text{OM} \perp \text{AB}$

Dimostrazione

Congiungiamo il centro O con gli estremi A e B della corda (fig. 33):

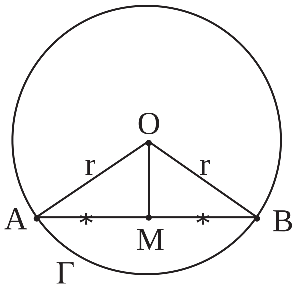


fig. 33

e consideriamo i triangoli OAM e OBM; essi hanno:

$\text{AM} \cong \text{MB}$		per ipotesi;
$\text{OA} \cong \text{OB}$		perché raggi;
OM	in comune	(o $\text{OM} \cong \text{OM}$ per la proprietà riflessiva della congruenza).

I due triangoli, avendo ordinatamente congruenti i tre lati, sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli altri elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$$A\widehat{M}O \cong B\widehat{M}O$$

ed essendo $A\widehat{M}B$ piatto, si ha che gli angoli $A\widehat{M}O$ e $B\widehat{M}O$ sono retti e quindi:

$$\text{OM} \perp \text{AB} .$$

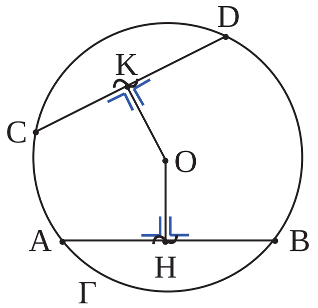
C.V.D.

[*Questa volta, ... e quasi sempre in seguito,* **COMPLETA TU** *la figura*].

TEOREMA

In una stessa circonferenza (o in circonferenze congruenti) corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro.

[*Dimostriamo il teorema nel caso in cui le due corde appartengono alla stessa circonferenza*].



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro } O \\ AB, CD \text{ corde} \\ AB \cong CD \\ OH \perp AB \\ OK \perp CD \end{cases}$

Th.: $OH \cong OK$

Dimostrazione

Osserviamo che le perpendicolari OH e OK, condotte da O alle corde, tagliano le corde nel loro punto medio (teorema pag. 16), per cui:

$AH \cong HB \cong CK \cong KD$ perché metà di corde congruenti ("*segnare AH, HB, CK e KD con il simbolo* $*$ ").

Congiungiamo, ora, il centro O con gli estremi A e C (fig. 34):

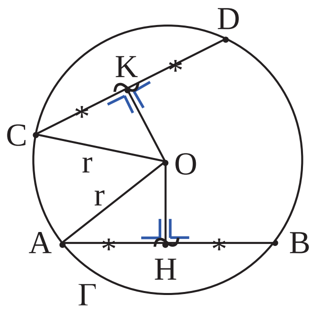


fig. 34

e consideriamo i triangoli OAH e OCK; essi hanno:

$O\widehat{H}A \cong O\widehat{K}C$ retti, per ipotesi;

$OA \cong OC$ perché raggi;

$AH \cong CK$ per precedente osservazione.

I due triangoli, oltre all'angolo retto, hanno ordinatamente congruenti l'ipotenusa ed un cateto per cui sono congruenti per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. Avranno, pertanto, tutti gli altri elementi corrispondenti congruenti, in particolare: $OH \cong OK$.

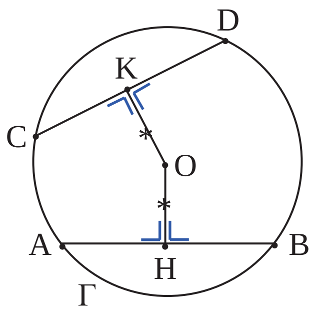
C.V.D.

Si effettua un'analoga dimostrazione se le corde appartengono a due circonferenze congruenti (questa considerazione vale anche per i teoremi successivi).

TEOREMA INVERSO

In una stessa circonferenza (o in circonferenze congruenti) se due corde hanno la stessa distanza dal centro, allora sono congruenti.

[*Dimostriamo il teorema nel caso in cui le due corde appartengono alla stessa circonferenza*]



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ \text{AB, CD corde} \\ \text{OH distanza di O da AB} \\ \text{OK distanza di O da CD} \\ \text{OH} \cong \text{OK} \end{cases}$

Th.: AB ≅ CD

Dimostrazione

Congiungiamo il centro O con gli estremi A e C (fig. 35):

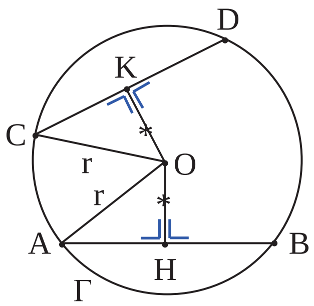


fig. 35

e consideriamo i triangoli OAH e OCK; essi hanno:

$O\widehat{H}A \cong O\widehat{K}C$ (≅ 90°)	perché OH e OK distanze di O rispettivamente da AB e CD;
OA ≅ OC	perché raggi;
OH ≅ OK	per ipotesi.

I due triangoli, avendo ordinatamente congruenti l'angolo retto, l'ipotenusa ed un cateto, sono congruenti per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. Avranno, pertanto, tutti gli altri elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

AH ≅ CK.

Infine, poiché le perpendicolari condotte dal centro alle corde dividono ogni corda in due segmenti congruenti, si deduce che, se le metà sono congruenti, saranno congruenti anche le corde stesse; cioè:

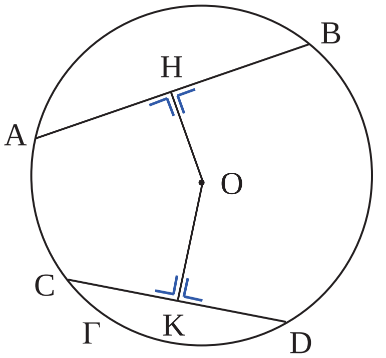
AB ≅ CD .

C.V.D.

TEOREMA

Se in una stessa circonferenze (o in circonferenze congruenti) due corde non sono congruenti, allora anche le loro distanze dal centro non sono congruenti e, in particolare, la corda maggiore ha distanza minore.

[*Dimostriamo il teorema nel caso in cui AB e CD siano due corde della stessa circonferenza di centro O, con AB > CD*]



$$\text{Hp.: } \begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ AB > CD \\ OH \perp AB \\ OK \perp CD \end{cases}$$

$$\text{Th.: } \quad OK > OH$$

Dimostrazione

Se le due corde non sono consecutive, “costruiamo” la corda BE consecutiva ad AB e congruente a CD (fig. 36):

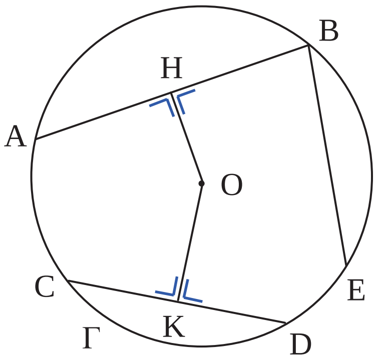


fig. 36

e diciamo OT la distanza di BE da O (fig. 37):

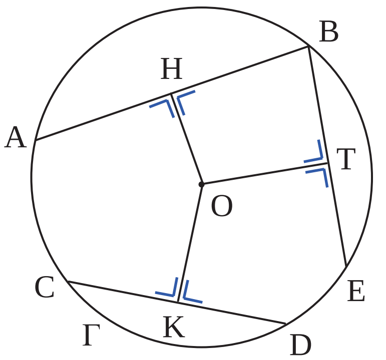


fig. 37

Poiché le corde CD e BE sono congruenti, si ha che le loro distanze dal centro sono congruenti (teorema pag. 18), cioè $OK \cong OT$.

Inoltre, da:

$AB > CD \ \wedge \ CD \cong BE$

segue, per la proprietà della disuguaglianza tra segmenti, che:

$AB > BE$

e la stessa relazione vale fra le metà delle due corde, cioè:

$BH > BT$

(**PERCHÈ** BH è la metà di AB e BT la metà di BE?)

Consideriamo ora il triangolo BHT (fig. 38):

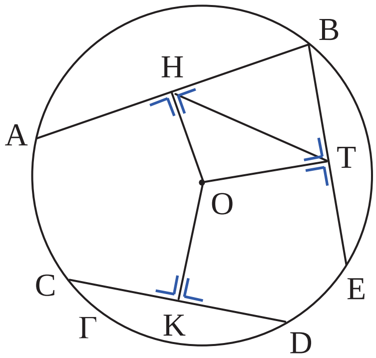


fig. 38

e osserviamo che, poiché in un triangolo al lato maggiore sta opposto l'angolo maggiore (*disuguaglianza triangolare*), si ha:

$B\widehat{T}H > B\widehat{H}T$ (“seg*nare* $B\widehat{T}H$ *e* $B\widehat{H}T$ *rispettivamente con i simboli* • *e* ⌒”)

[fig. 39]:

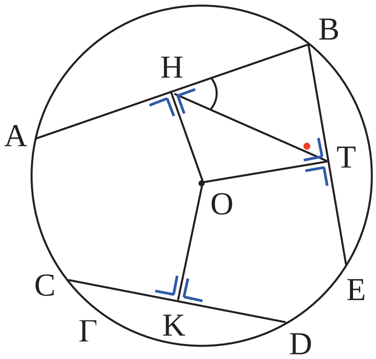


fig. 39

per cui fra gli angoli $H\widehat{T}O$ e $T\widehat{H}O$, complementari rispettivamente degli angoli $B\widehat{T}H$ e $B\widehat{H}T$, vale la relazione opposta, cioè:

$H\widehat{T}O < T\widehat{H}O$

e quindi:

$OH < OT$ perché nel triangolo HOT ad angolo minore si oppone lato minore,

che è lo stesso dire:

$OH < OK$

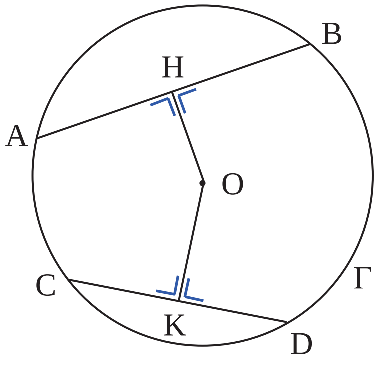
C.V.D.

TEOREMA INVERSO

Se in una stessa circonferenza (o in circonferenze congruenti) due corde hanno distanze dal centro non congruenti, allora anche le corde non sono congruenti e, in particolare, è maggiore la corda che ha distanza minore da esso.

PROVA TU a dimostrare il teorema, sempre nel caso in cui le due corde AB e CD appartengono alla stessa circonferenza di centro O e la distanza di AB da O sia minore di quella di CD da O.

Riferisci, quindi, la dimostrazione alla seguente figura e ai dati riportati:



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro } O \\ OH \perp AB \\ OK \perp CD \\ OH < OK \end{cases}$

Th.: $AB > CD$

[suggerimento: *se le due corde non sono consecutive, "costruisci" la corda BE consecutiva a ….. e congruente a ….. . Dimostrazione per assurdo*]

6.5 Reciproche posizioni fra retta e circonferenza

Date la circonferenza Γ, di centro O e raggio r, ed una retta *s*, vogliamo studiare le posizioni che la retta può assumere rispetto alla circonferenza.

Tracciamo dal centro O la perpendicolare OH alla retta *s*. Si possono presentare i seguenti casi:

1. **retta esterna alla circonferenza** (fig. 40):

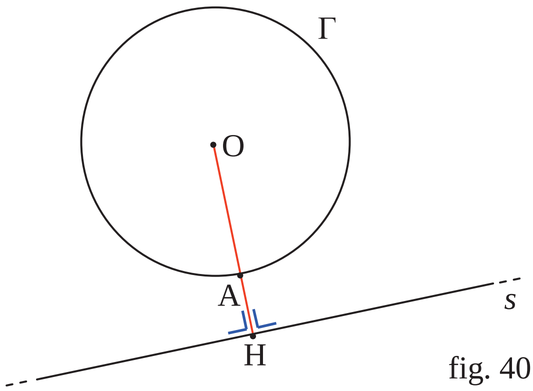


fig. 40

$\boxed{OH > OA}$ cioè $\boxed{OH > r}$

COMPLETA:

In tal caso il punto H è **esterno** alla circonferenza e ogni altro punto P appartenente ad *s*, avendo distanza da O ………………… di …… , perché il segmento di perpendicolare è ……………….. di ogni segmento ………………. , è …………………. alla circonferenza (fig. 41):

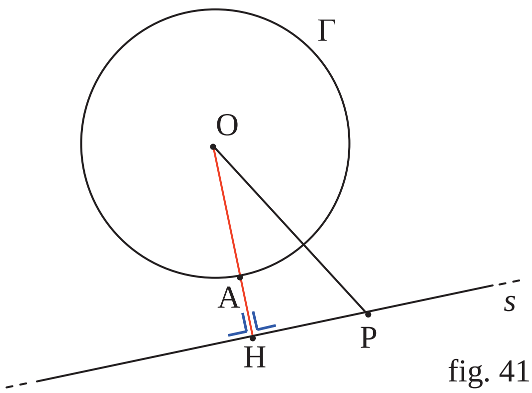


fig. 41

Pertanto: $\Gamma \cap s =$ ……. .

In tal caso la retta è **esterna** alla circonferenza.

Pertanto:

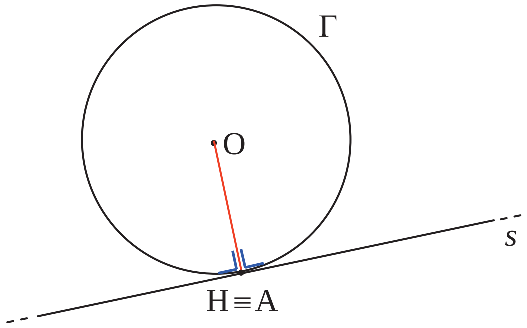
una retta è esterna ad una circonferenza se la sua distanza dal centro della circonferenza è maggiore del raggio.

Viceversa:

Se la distanza di una retta dal centro di una circonferenza è maggiore del raggio, allora la retta è esterna alla circonferenza (**PROVA TU**)

[e quindi "si ha" una **condizione necessaria e sufficiente**].

2. **retta tangente alla circonferenza** (fig. 42):



$\boxed{OH \cong OA}$ cioè $\boxed{OH \cong r}$

fig. 42

COMPLETA:

In tal caso il punto H "**sta**" sulla circonferenza e ogni altro punto P appartenente ad *s*, avendo distanza da O …………………. di …… (perché il segmento di perpendicolare è …………………… di ogni segmento ………………. , è …………………. alla circonferenza (fig. 43):

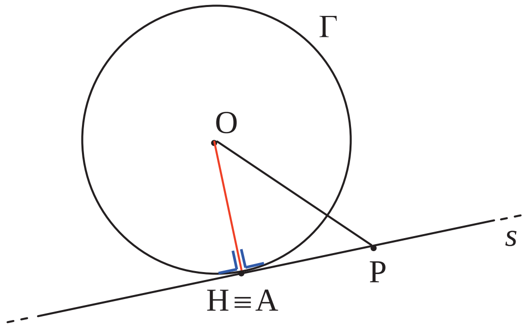


fig. 43

Pertanto:

$\Gamma \cap s = \{H\}$ $\boxed{\text{H si dice punto di tangenza}}$

In questo caso la retta è **tangente** alla circonferenza.

Pertanto:

una retta è tangente ad una circonferenza se la sua distanza dal centro della circonferenza è congruente al raggio.

Viceversa:

Se la distanza di una retta dal centro di una circonferenza è congruente al raggio, allora la retta è tangente alla circonferenza (**PROVA TU**)

[e quindi "si ha" una **condizione necessaria e sufficiente**].

3. **retta secante la circonferenza** (fig. 44):

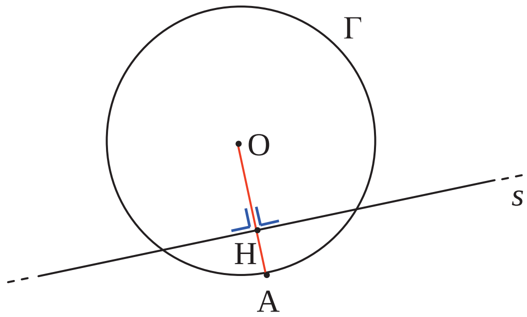


fig. 44

$\boxed{OH < OA}$ cioè $\boxed{OH < r}$

COMPLETA:

In tal caso il punto H è **interno** alla circonferenza. Prendiamo, allora, su *s* un punto P tale che PH ≅ r e consideriamo il triangolo rettangolo OPH (fig. 45):

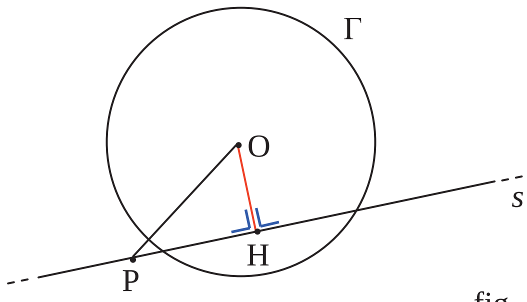


fig. 45

Si ha che:

OP > … ,

perché, nel triangolo rettangolo OPH, il lato OP è ………………………

e quindi:

… > r ,

per cui il punto … è esterno alla circonferenza.

Segue che il segmento HP unisce un punto interno (…) con un punto esterno (…) e pertanto deve intersecare la ………………………….. (*postulato di continuità*), diciamo nel punto E (fig. 46):

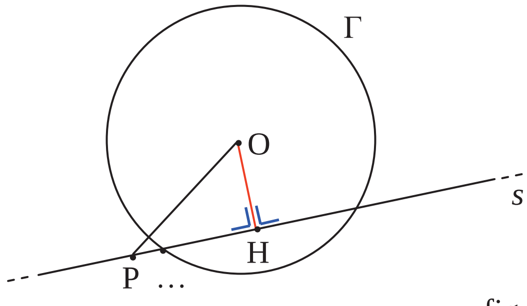


fig. 46

Ripetendo lo stesso ragionamento con un punto Q, simmetrico di P rispetto ad H, e quindi tale che $QH \cong r$, si ha che il segmento QH ha un punto F in comune con la circonferenza (fig. 47):

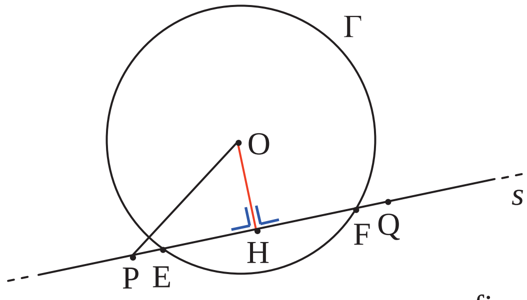


fig. 47

Esistono, quindi, due punti E ed F, comuni alla retta *s* e alla circonferenza. In questo caso la retta *s* si dice **secante** la circonferenza nei punti E ed F.

In simboli:

$$\Gamma \cap s = \{E, F\} \ .$$

Pertanto:

una retta è secante ad una circonferenza se la sua distanza dal centro della circonferenza è minore del raggio.

Viceversa:

Se la distanza di una retta dal centro di una circonferenza è minore del raggio, allora la retta è secante la circonferenza (**PROVA TU**)
[e quindi "si ha" una **condizione necessaria e sufficiente**].

Tutto quanto detto ci permette di formulare il seguente teorema:

TEOREMA

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una retta sia:

- ❖ **esterna** ad una circonferenza è che la sua distanza dal centro sia maggiore del raggio;
- ❖ **tangente** ad una circonferenza è che la sua distanza dal centro sia congruente al raggio;
- ❖ **secante** ad una circonferenza è che la sua distanza dal centro sia minore del raggio.

In conclusione, sai dire QUANTI punti, al massimo, possono avere in comune una retta ed una circonferenza?

6.6 Reciproche posizioni fra due circonferenze

Date in un piano due circonferenze Γ_1 e Γ_2, esaminiamo le possibili reciproche posizioni che esse possono assumere.

Osserviamo innanzitutto che per tre punti allineati non passa alcuna circonferenza (COROLLARIO 2, pag. 14), mentre per tre punti non allineati ne passa una sola (TEOREMA pag. 13).

Pertanto, due circonferenze possono avere al massimo due punti di intersezione (COROLLARIO 1, pag. 14).

Si possono presentare, quindi, i casi seguenti:

1° caso: **circonferenze esterne** (fig. 48):

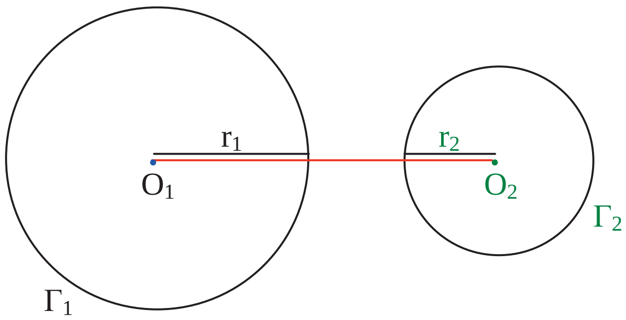


fig. 48

Le circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono **esterne**: la distanza fra i due centri è maggiore della somma dei due raggi.
In simboli:

$$\boxed{O_1O_2 > r_1 + r_2}$$

COMPLETA:
Nel caso delle circonferenze esterne, ogni punto di Γ_1 è ………………… a Γ_2 e ogni …………… di ….. è ………………… a Γ_1.
Quindi:

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = ...$

Si ha:

- **due circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono fra loro esterne se la distanza fra i due centri è maggiore della somma dei due raggi**.

Viceversa:

- **se la distanza fra i centri di due circonferenze è maggiore della somma dei due raggi, allora le due circonferenze sono esterne**.

[e quindi "si ha" una **condizione necessaria e sufficiente**].

2° caso: **circonferenze tangenti esternamente** (fig. 49):

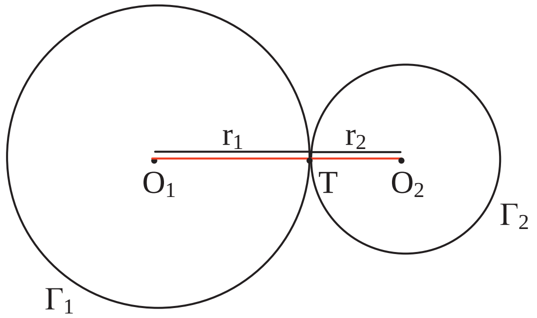


fig. 49

Le circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono **tangenti esternamente**: la distanza fra i due centri è congruente alla somma dei due raggi.

In simboli:

$\boxed{O_1O_2 \cong r_1 + r_2}$ T si dice punto di tangenza

COMPLETA:

Nel caso delle circonferenze Γ_1 e Γ_2, esse hanno un unico ……….. comune T, appartenente alla retta ….. ; ogni altro punto di …… è ……………… a Γ_2 e ogni altro punto di …… è ……………… a …… (cioè il centro di ognuna delle due circonferenze è …………… all'altra).

Quindi:

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 =$ ……

Si ha:

- **due circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono tangenti esternamente se la distanza fra i centri è congruente alla somma dei due raggi**.

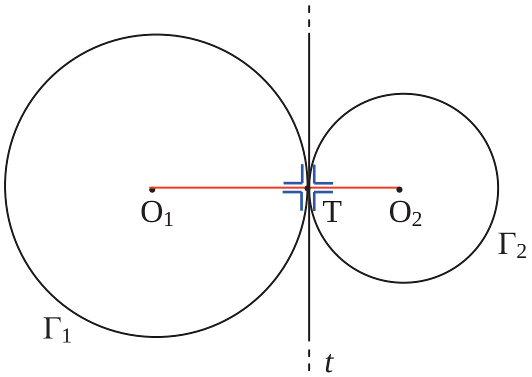
Viceversa:

- **se la distanza fra i centri di due circonferenze è congruente alla somma dei due raggi, allora le due circonferenze sono tangenti esternamente**.

[e quindi "si ha" una **condizione necessaria e sufficiente**].

OSSERVAZIONE:

Nel caso esaminato, le due circonferenze hanno, nel punto T, la stessa retta tangente *t* che è perpendicolare alla congiungente O_1O_2 (fig. 50):



Abbiamo "segnato" quattro angoli retti; è vero che sono troppi?

fig. 50

3° caso: **circonferenze secanti** (fig. 51):

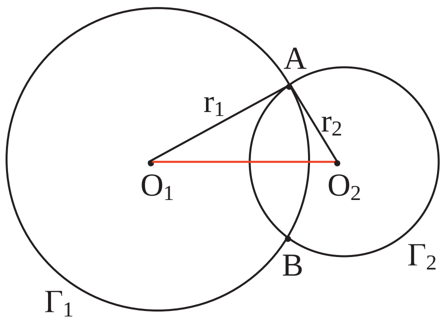


fig. 51

Le circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono **secanti**: la distanza fra i due centri è minore della somma dei due raggi e maggiore della loro differenza.

In simboli:

$\boxed{r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2}$

COMPLETA:

Nel caso delle circonferenze secanti, le due circonferenze Γ_1 e Γ_2 hanno ….. punti, … e … , in comune e che non appartengono alla congiungente ……. .

Si ha:

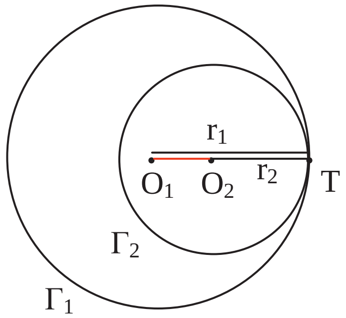
- **due circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono secanti se la distanza fra i due centri è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza**.

Viceversa:

- **se la distanza fra i centri di due circonferenze è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza, allora le due circonferenze sono secanti**.

[e quindi "si ha" una **condizione necessaria e sufficiente**].

4° caso: **circonferenze tangenti internamente** (fig. 52):



$r_1 > r_2$

fig. 52

Le circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono **tangenti internamente**: la distanza fra i due centri è congruente alla differenza dei due raggi.

In simboli:

$\boxed{O_1O_2 \cong r_1 - r_2}$ T si dice punto di tangenza

COMPLETA:

Nel caso delle circonferenze tangenti internamente, le due circonferenze Γ_1 e Γ_2 hanno un unico ………... comune T, appartenente alla retta …. , e ogni altro punto di …….. è interno a ………… .

Quindi:

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \ldots\ldots$

Si ha:

- **due circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono tangenti internamente se la distanza fra i due centri è congruente alla differenza dei due raggi**.

Viceversa:

- **se la distanza fra i centri di due circonferenze è congruente alla differenza dei raggi, allora le due circonferenze sono tangenti internamente**.

[e quindi "si ha" una **condizione necessaria e sufficiente**].

OSSERVAZIONE:

Nel caso esaminato, le due circonferenze hanno, nel punto T, la stessa retta tangente *t* che è perpendicolare alla retta O_1O_2 (fig. 53):

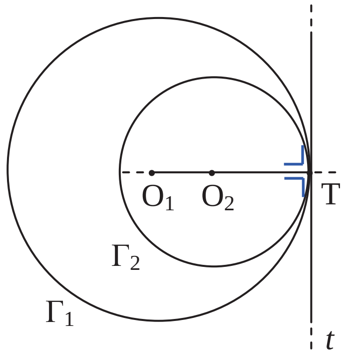
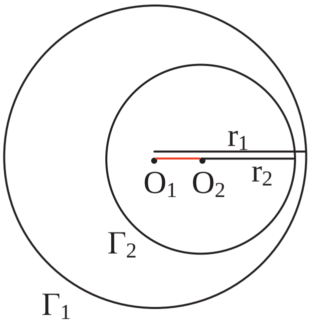


fig. 53

5° caso: **circonferenza una interna all'altra** (fig. 54):



$r_1 > r_2$

fig. 54

La circonferenza Γ_2 è **interna alla circonferenza** Γ_1 : la distanza fra i due centri è minore della differenza dei raggi.

In simboli:

$\boxed{O_1O_2 < r_1 - r_2}$

COMPLETA:

Nel caso della circonferenza Γ_2 , interna alla circonferenza Γ_1 , si ha che ………. punto di ….. è ……………. a Γ_1 .

Quindi: $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 =$ ……

Si ha:

- **una circonferenza Γ_2 è interna ad una circonferenza Γ_1 se la distanza dei loro centri è minore della differenza dei raggi**.

Viceversa:

- **se la distanza fra i centri di due circonferenze è minore della differenza dei raggi, allora una circonferenza è interna all'altra**.

[e quindi "si ha" una **condizione necessaria e sufficiente**].

Tutto quanto detto ci permette di formulare il seguente teorema:

TEOREMA

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due circonferenze siano:

- ❖ **esterne** è che la distanza fra i centri sia maggiore della somma dei raggi;
- ❖ **tangenti esternamente** è che la distanza fra i centri sia congruente alla somma dei raggi;
- ❖ **secanti** è che la distanza fra i centri centri sia minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza;
- ❖ **tangenti internamente** è che la distanza fra i centri sia congruente alla differenza dei raggi;
- ❖ **interne una all'altra** è che la distanza fra i centri centri sia minore della differenza dei raggi.

Come caso particolare di circonferenze una interna all'altra, si ha quello di due circonferenze che hanno lo stesso centro (**circonferenze concentriche**) [fig. 55]:

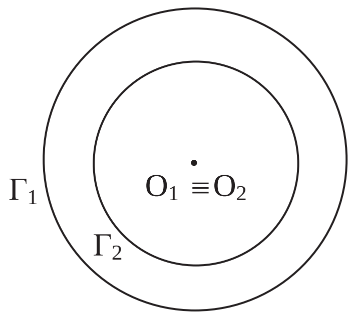


fig. 55

La definizione si estende ovviamente ai **cerchi concentrici**.

Nel caso di due circonferenze concentriche, si definisce **corona circolare** la parte di piano limitata dalle due circonferenze (fig. 56):

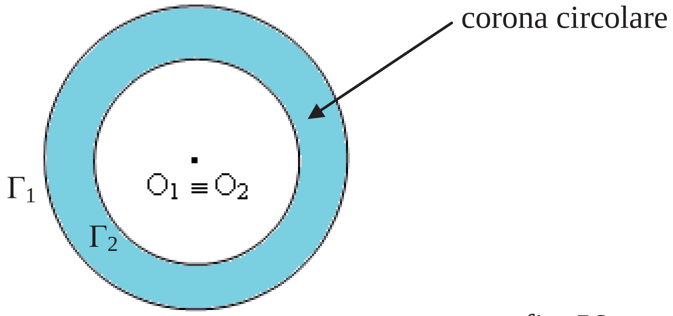


fig. 56

In altre parole, la corona circolare è l'insieme dei punti del cerchio di raggio maggiore che sono esterni a quello di raggio minore.

Riassumendo si ha:

reciproche posizioni di due circonferenze di raggi r_1 e r_2, con $r_1 > r_2$	**punti in comune**	**distanza fra i centri** (d)
esterne	0	$d > r_1 + r_2$
tangenti esternamente	1	$d \cong r_1 + r_2$
secanti	2	$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$
tangenti internamente	1	$d \cong r_1 - r_2$
interne	0	$d < r_1 - r_2$
concentriche	0	$d = 0$

6.7 Angoli alla circonferenza e corrispondenti angoli al centro

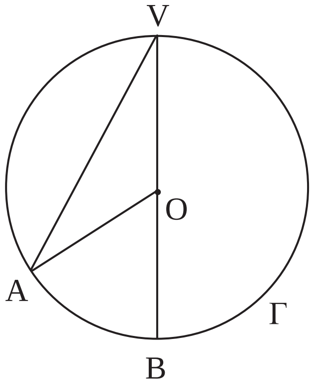
Vale il seguente:

TEOREMA

Ogni angolo alla circonferenza è congruente alla metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.

Esaminiamo i casi che si possono presentare:

1° caso: i lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti ed il centro appartiene ad uno di essi.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ A\widehat{V}B \text{ angolo alla circonferenza} \\ O \in VB \end{cases}$

Th.: $A\widehat{V}B \cong \frac{1}{2}\, A\widehat{O}B$

Dimostrazione

Indichiamo l'angolo alla circonferenza $A\widehat{V}B$ con α e l'angolo al centro corrispondente $A\widehat{O}B$ con β (fig. 57):

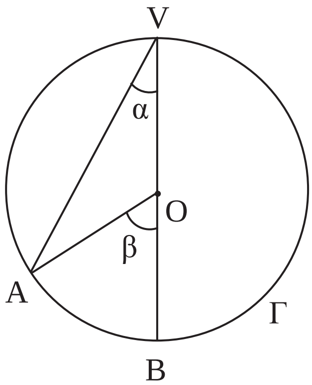


fig. 57

Dobbiamo quindi dimostrare che $\alpha \cong \frac{1}{2}\beta$.

Osserviamo, a tale scopo, che il triangolo OAV è isoscele sulla base AV perché:

$OA \cong OV$ raggi della stessa circonferenza.

Segue che:

$O\widehat{A}V \cong O\widehat{V}A$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele ("*indicare $O\widehat{A}V$ con α*")

[fig. 58]:

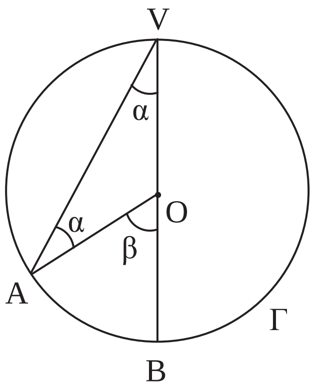


fig. 58

Inoltre:

$A\widehat{O}B \cong O\widehat{A}V + O\widehat{V}A$ perché $A\widehat{O}B$ è un angolo esterno al triangolo OAV ed è quindi congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti ad esso (*secondo teorema dell'angolo esterno*, Tomo 1, primo anno, pag. 125)

e quindi:

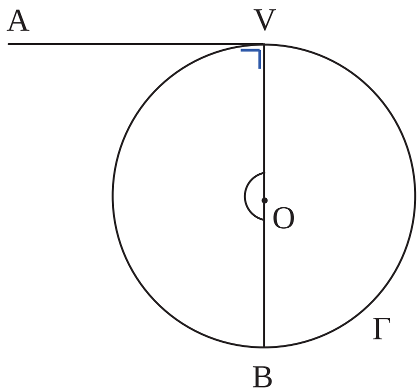
$\beta \cong \alpha + \alpha \cong 2\,\alpha$

cioè:

$\alpha \cong \frac{1}{2}\,\beta$.

C.V.D.

2° caso: <u>i lati dell'angolo alla circonferenza sono uno secante, passante per il centro, e l'altro tangente</u>.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ \text{AV tangente alla circonferenza} \\ A\widehat{V}B \text{ angolo alla circonferenza} \\ O \in VB \end{cases}$

Th.: $A\widehat{V}B \cong \frac{1}{2}\,V\widehat{O}B$

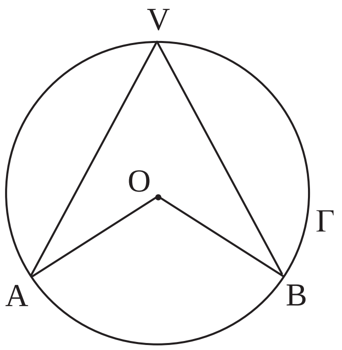
Dimostrazione

Basta osservare che l'angolo alla circonferenza $A\widehat{V}B$ è retto e che l'angolo al centro corrispondente $V\widehat{O}B$ è piatto, per cui:

$A\widehat{V}B \cong \frac{1}{2}\,V\widehat{O}B$.

C.V.D.

3° caso: <u>i lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti e il centro della circonferenza è interno all'angolo</u>.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ A\hat{V}B \text{ angolo alla circonferenza} \\ O \notin VA \; ; \; O \notin VB \end{cases}$

Th.: $A\hat{V}B \cong \frac{1}{2} A\hat{O}B$

Dimostrazione

Tracciamo il diametro VC (fig. 59):

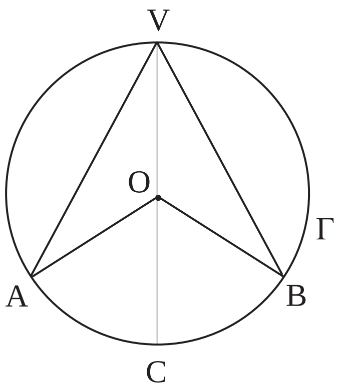


fig. 59

e osserviamo che:

$A\hat{V}C \cong \frac{1}{2} A\hat{O}C$ (1° caso)

$B\hat{V}C \cong \frac{1}{2} B\hat{O}C$ (1° caso)

e quindi, sommando membro a membro:

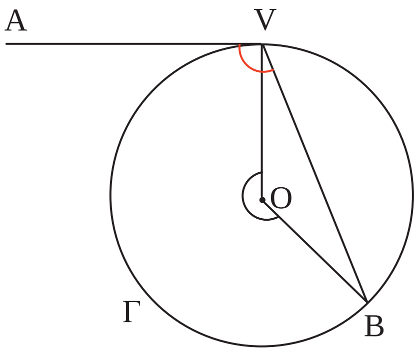
$$A\hat{V}C + B\hat{V}C \cong \frac{1}{2} A\hat{O}C + \frac{1}{2} B\hat{O}C$$

cioè:

$$A\hat{V}B \cong \frac{1}{2} (A\hat{O}C + B\hat{O}C) \cong \frac{1}{2} A\hat{O}B$$

C.V.D.

4° caso: <u>i lati dell'angolo alla circonferenza sono uno secante e l'altro tangente; il centro della circonferenza è interno all'angolo</u>.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ A\hat{V}B \text{ angolo alla circonferenza} \\ O \in A\hat{V}B \end{cases}$

Th.: $A\hat{V}B \cong \frac{1}{2}\ V\hat{O}B$ (con $V\hat{O}B$ concavo)

Dimostrazione

Tracciamo il diametro VC (fig. 60):

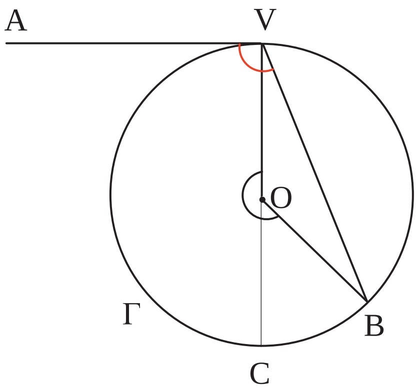


fig. 60

e osserviamo che:

$B\hat{V}C \cong \frac{1}{2}\ B\hat{O}C$ (1° caso);

$A\hat{V}C \cong \frac{1}{2}\ V\hat{O}C$ (2° caso),

e quindi, sommando membro a membro:

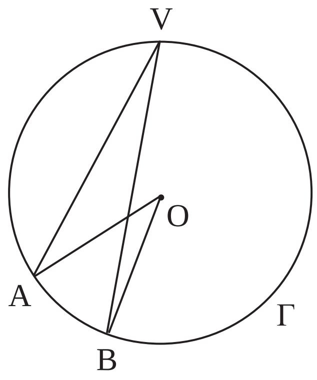
$$B\hat{V}C + A\hat{V}C \cong \frac{1}{2}\ B\hat{O}C + \frac{1}{2}\ V\hat{O}C$$

cioè:

$$B\hat{V}C + A\hat{V}C \cong \frac{1}{2}\ (B\hat{O}C + V\hat{O}C) \cong \frac{1}{2}\ V\hat{O}B$$

C.V.D.

5° caso: <u>i lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti e il centro della circonferenza è esterno all'angolo</u>.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro } O \\ A\hat{V}B \text{ angolo alla circonferenza} \\ O \notin A\hat{V}B \end{cases}$

Th.: $A\hat{V}B \cong \frac{1}{2}\ A\hat{O}B$

Dimostrazione

Tracciamo il diametro VC (fig. 61):

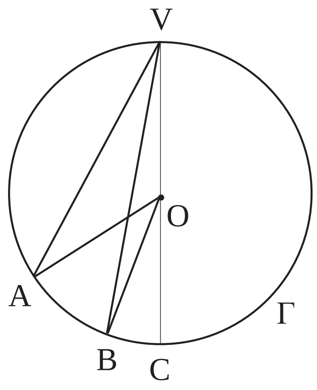


fig. 61

e osserviamo che:

$A\hat{V}B \cong A\hat{V}C - B\hat{V}C$

ma:

$A\hat{V}C \cong \frac{1}{2}\ A\hat{O}C$ (1° caso)

$B\hat{V}C \cong$ ….. **COMPLETA**

…………………………………………………………………………………………………

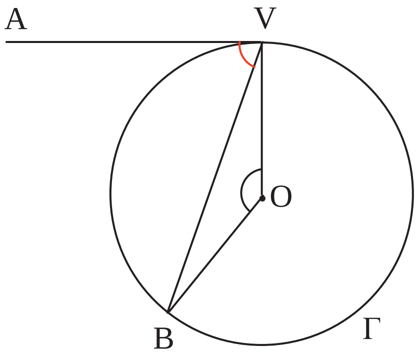
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………. .

6° caso: i lati dell'angolo alla circonferenza sono uno secante e l'altro tangente; il centro della circonferenza è esterno all'angolo.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ \text{AV tangente alla circonferenza} \\ A\hat{V}B \text{ angolo alla circonferenza} \\ O \notin A\hat{V}B \end{cases}$

Th.: $A\hat{V}B \cong \frac{1}{2}\, V\hat{O}B$

Dimostrazione

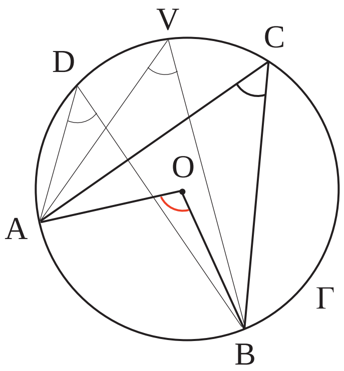
PROVA TU

[suggerimento: *traccia il diametro VC* …………………]

Come conseguenze del teorema sugli angoli al centro e alla circonferenza si hanno i seguenti:

COROLLARIO 1

Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti sono congruenti.



Dimostrazione

PROVA TU

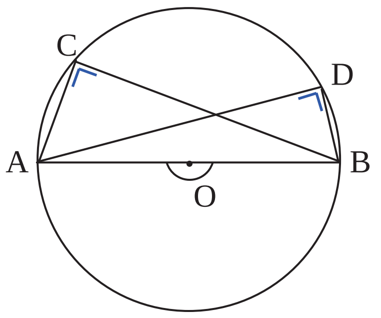
[suggerimento: *"confronta" ogni angolo alla circonferenza con il corrispondente angolo al centro*].

Vale anche il viceversa:

Angoli alla circonferenza congruenti insistono su archi congruenti (**PROVA TU**).

COROLLARIO 2

Ogni angolo alla circonferenza che insiste su di una semicirconferenza è retto.



Dimostrazione

PROVA TU

Il COROLLARIO 2 può essere formulato nel seguente modo: "**ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo**".

CURIOSITÀ

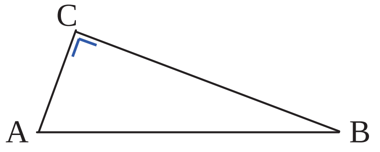
Il COROLLARIO 2 è detto anche "teorema di Dante" in quanto Dante Alighieri, nel Paradiso, al canto XIII versi 101 – 102, riporta:

"*o se del mezzo cerchio far si puote*
triangol sì ch'un retto non avesse"

(commento: … *o se in un semicerchio si possa inscrivere un triangolo che non sia rettangolo*).

VICEVERSA:

Un triangolo rettangolo si può inscrivere in una circonferenza con il diametro coincidente con l'ipotenusa.



Infatti, dato un triangolo rettangolo ABC, retto in C (figura a lato), tracciamo la circonferenza passante per i punti A, B, C (che …………. ed è ………..).

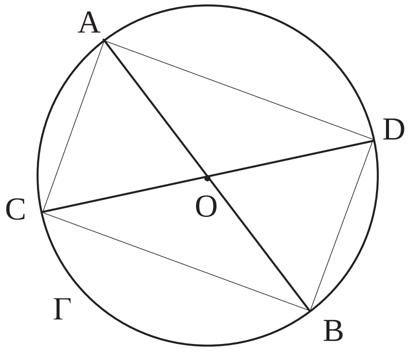
CONTINUA ……………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………………………

Il COROLLARIO 2 permette di disegnare "correttamente" un triangolo rettangolo se si ha un compasso e un righello.

Infatti ……….. **CONTINUA** ………………………………………………………………………

1° Problema risolto

Data la circonferenza Γ di centro O e raggio r, siano AB e CD due suoi diametri. Dimostra che il quadrilatero ACBD è un rettangolo.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ \text{AB diametro} \\ \text{CD diametro} \end{cases}$

Th.: ACBD rettangolo

Dimostrazione

Per il COROLLARIO 2, pag. 39, si ha che:

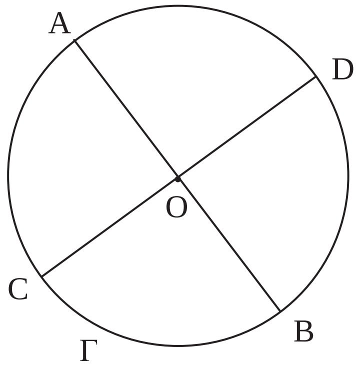
- il triangolo DAC è retto in A, perché inscritto nella semicirconferenza di diametro CD;
- il triangolo ACB è retto in C, perché inscritto nella semicirconferenza di diametro AB;
- il triangolo CBD è retto in B, perché inscritto nella semicirconferenza di diametro CD;
- il triangolo BDA è retto in D, perché inscritto nella semicirconferenza di diametro AB.

Pertanto il quadrilatero ACBD, avendo tutti e quattro gli angoli retti, è un rettangolo.

C.V.D.

"Quando" il rettangolo ACBD "diventa" un quadrato?

[Ti aiuto con la figura che segue:



dove AB e CD ……………. **CONTINUA**]

6.8 Tangenti condotte da un punto ad una circonferenza

Siano dati nel piano una circonferenza Γ e un punto P.

Distinguiamo i seguenti casi:

1° caso: **il punto P è interno alla circonferenza** (fig. 62):

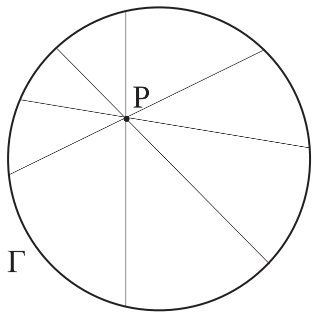


fig. 62

Tutte le rette passanti per P (*fascio di rette di centro P*) sono secanti la circonferenza e quindi **non esiste** alcuna retta tangente alla circonferenza passante per P.

2° caso: **il punto P appartiene alla circonferenza** (fig. 63):

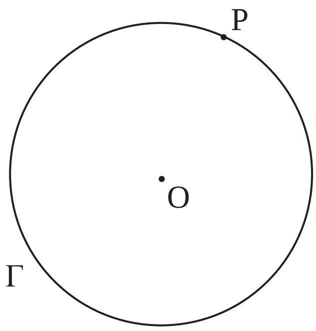


fig. 63

In tal caso esiste **una ed una** sola retta t tangente alla circonferenza passante per P (punto 2. pag. 24). Tale retta è perpendicolare al raggio OP (fig. 64):

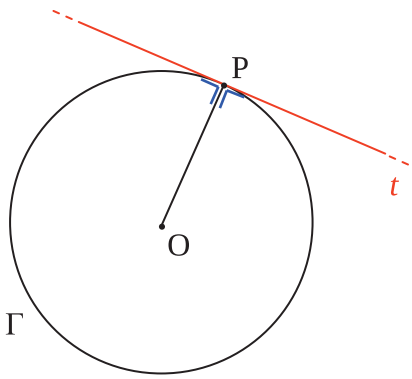


fig. 64

3° caso: **il punto P è esterno alla circonferenza** (fig. 65):

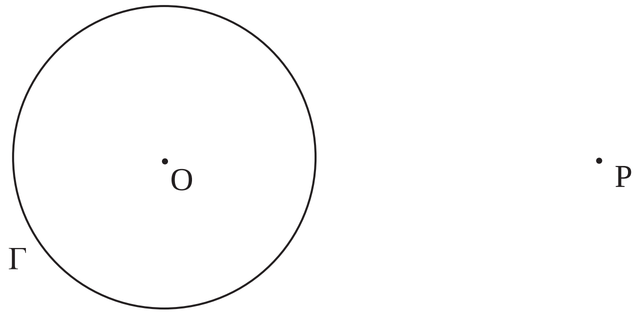
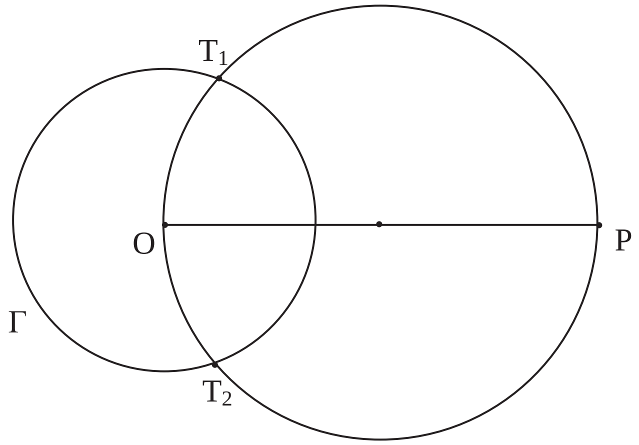


fig. 65

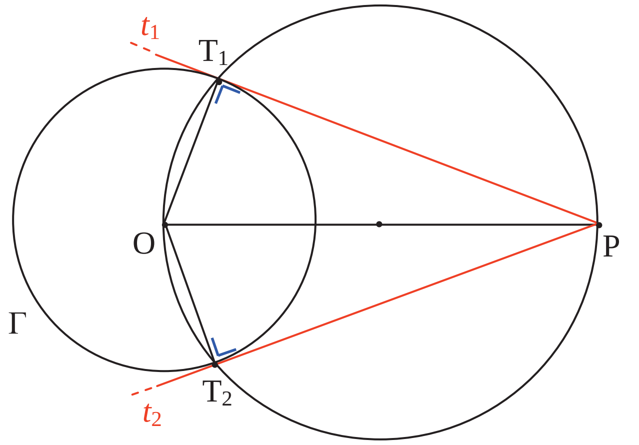
In tal caso esistono due rette t_1 e t_2 tangenti a Γ, passanti per P. Tracciamo, infatti, la circonferenza di diametro OP che è secante Γ in due punti T_1 e T_2 (fig. 66):



Non conduciamo … *per ora* le tangenti t_1 e t_2 .

fig. 66

Basta, poi, osservare che i due triangoli OT_1P e OT_2P sono retti rispettivamente in T_1 e in T_2 in quanto inscritti in una semicirconferenza e quindi le rette PT_1 e PT_2, perpendicolari rispettivamente ai raggi OT_1 e OT_2, sono le **tangenti** t_1 e t_2 a Γ, passanti per P (fig. 67):



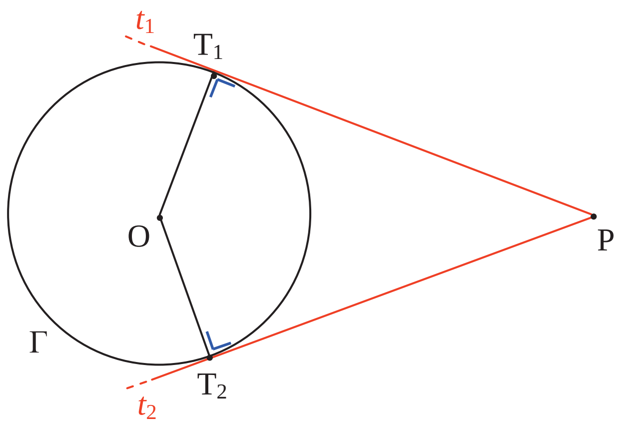
t_1 e t_2 **rette tangenti** a Γ passanti per P.
I segmenti PT_1 e PT_2 sono detti **segmenti di tangenza**.

fig. 67

Si ha il seguente

TEOREMA

Se da un punto P, esterno ad una circonferenza di centro O, si conducono le due rette tangenti ad essa, i segmenti di tangenza sono congruenti.



Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ P \notin \Gamma \\ PT_1 \perp OT_1 \\ PT_2 \perp OT_2 \end{cases}$

Th.: $PT_1 \cong PT_2$

Dimostrazione

Congiungiamo O con P (fig. 68):

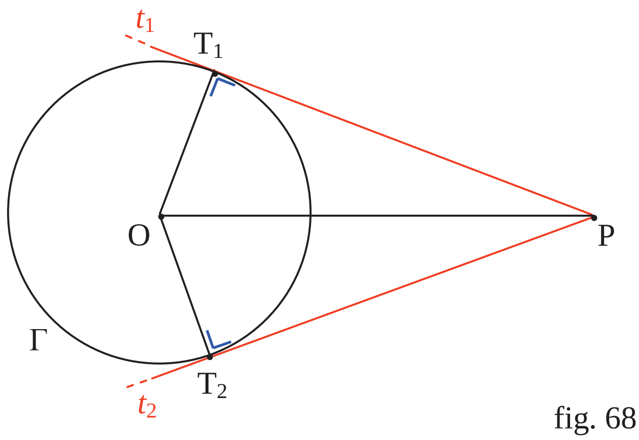


fig. 68

e consideriamo i triangoli OPT_1 e OPT_2; essi hanno:

$O\widehat{T_1}P \cong O\widehat{T_2}P$		perché entrambi retti;
OP	in comune	(o $OP \cong OP$ per la proprietà riflessiva della congruenza);
$OT_1 \cong OT_2$		perché raggi della stessa circonferenza.

I due triangoli, oltre all'angolo retto, hanno due altri elementi ordinatamente congruenti (che non sono i due angoli acuti) e quindi sono congruenti per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. Avranno, pertanto, tutti gli altri elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$PT_1 \cong PT_2$.

C.V.D.

COROLLARIO 1

Data una circonferenza di centro O ed un punto P esterno ad essa, il segmento PO appartiene alla bisettrice dell'angolo formato dalle due tangenti condotte dal punto P (PROVA TU).

COROLLARIO 2

Data una circonferenza di centro O ed un punto P esterno ad essa, il segmento PO appartiene all'asse della corda che ha per estremi i punti di tangenza (PROVA TU).

COSTRUZIONI GEOMETRICHE (con squadra e compasso)

- Data una retta *t* , sia O un punto non appartenente a tale retta . **PROVA TU** a "costruire" la circonferenza di centro O e tangente alla retta *t* .
  Motiva la costruzione effettuata.

- Data una retta *t*, **PROVA TU** a "costruire" la circonferenza tangente a *t* in un punto T e passante per un dato punto A, distinto da T.
  Motiva la costruzione effettuata.
  Cosa succede se il punto A appartiene alla retta *t* ?

- Date due rette *s* e *t*, **PROVA TU** a "costruire" la circonferenza tangente alle due rette, conoscendo il punto T di tangenza con una di esse.
  Esegui la costruzione nei seguenti casi:
  a) le rette *s* e *t* sono parallele;
  b) le rette *s* e *t* sono incidenti.

  Motiva le costruzioni effettuate.

  [suggerimento: *nel caso a), manda la mediana della striscia individuata dalle rette* ….. ;
  nel caso b), manda le bisettrici degli angoli formati dalle rette …..]

- Date tre rette *s* , *t* , *u* , a due a due incidenti, **PROVA TU** a "costruire" la circonferenza tangente alle tre rette.
  Motiva la costruzione effettuata.

2° Problema risolto

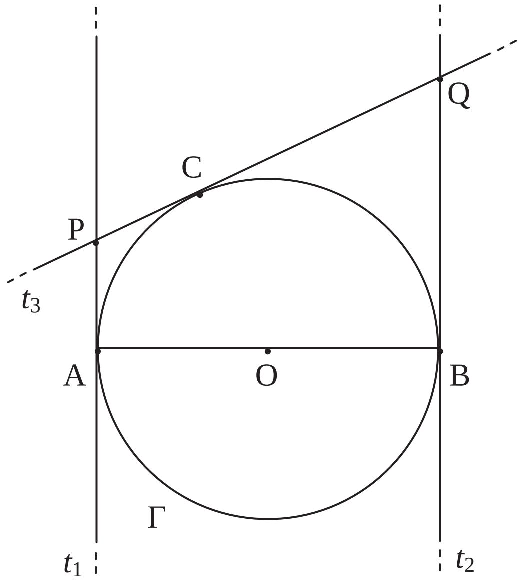
Data una circonferenza Γ di centro O, sia AB un suo diametro. Traccia le rette tangenti, t_1 e t_2, rispettivamente in A e in B. Conduci, poi, un'ulteriore retta t_3, tangente a Γ, tale che:

$t_3 \cap \Gamma = \{C\}$;

$t_3 \cap t_1 = \{P\}$;

$t_3 \cap t_2 = \{Q\}$.

Dimostra che: $PQ \cong PA + QB$.

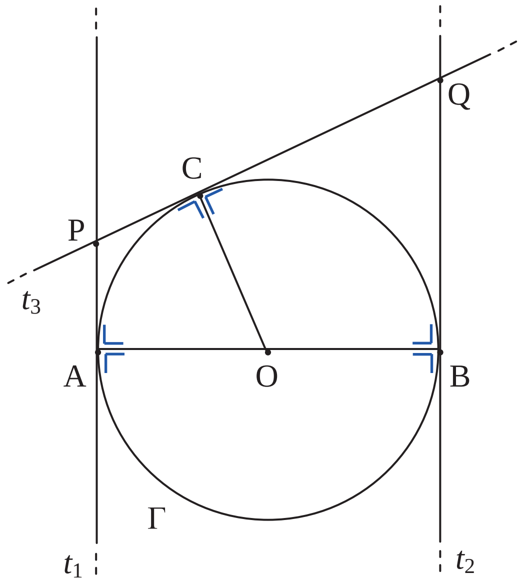


Hp.: $\begin{cases} \Gamma \text{ circonferenza di centro O} \\ O \in AB \\ t_1,\ t_2,\ t_3 \text{ tangenti a } \Gamma \\ t_3 \cap \Gamma = \{C\} \\ t_3 \cap t_1 = \{P\} \\ t_3 \cap t_2 = \{Q\} \end{cases}$

Th.: $PQ \cong PA + QB$

Dimostrazione

Osserviamo innanzitutto che la retta tangente ad una circonferenza ed il raggio passante per il punto di tangenza sono fra loro perpendicolari per cui la figura può essere subito "arricchita" come segue:



"arricchimento" eseguito
…. per non dimenticare

Inoltre:

$PA \cong PC$ perché segmenti di tangenti condotte da P (punto esterno) alla circonferenza Γ ;

$QB \cong QC$ perché segmenti di tangenti condotte da Q (punto esterno) alla circonferenza Γ .

Pertanto, da:

$PQ \cong PC + QC$

segue:

$PQ \cong PA + QB$.

C.V.D.